

Francesco Romano

Corso di laurea in Ingegneria Aerospaziale
presso l'Università degli studi di Padova.

Relazione di Dinamica del Volo Spaziale

**“Rappresentazione grafica di orbite e di manovre “alla Hohmann”
mediante l'utilizzo di software MATLab”**

“Confronto tra manovra Hohmann diretta e Hohmann Bi-Ellittica”



Introduzione:

MATLab è nato nel 1970 come software per il calcolo matriciale e numerico, ma si è poi sviluppato, negli anni a venire, come vero e proprio software ingegneristico.

Tramite MATLab è possibile implementare algoritmi in grado di ricavare tutti i parametri dell'orbita in funzione di pochi dati iniziali.

E' inoltre possibile la rappresentazione grafica dell'orbita in tre dimensioni, completa di corpi celesti con relative "textures".

Cenni teorici:

Tutti gli studi sulla meccanica orbitale si basano sulle tre leggi di Keplero, unite alle tre leggi di Newton.

Le tre leggi di Newton:

- Prima Legge: un corpo, in stato di moto rettilineo uniforme, in uno spazio privo di attriti, mantiene tale condizione di moto se non intervengono forze esterne a perturbarlo.
- Seconda Legge: la derivata totale della quantità di moto rispetto al tempo è pari alla risultante di tutte le forze agenti sul corpo considerato.
- Terza Legge: ad ogni azione, forza, applicata ad un corpo, vi corrisponde sempre una reazione uguale e contraria.

La forza di attrazione che si sviluppa tra due masse, m_1 m_2 ad una distanza tra i loro centri di massa pari a r è, secondo Newton:

$$\vec{F} = G \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \vec{u}_r$$

dove u_r è il versore del raggio vettore tra i centri di massa e dove G è la costante di gravitazione universale pari a $G = 6,67428 \cdot 10^{-11} m^3 \cdot kg^{-1} \cdot s^{-2}$.

Le tre leggi di Keplero:

- Prima Legge: l'orbita di un corpo celeste è un'ellisse, dove il sole occupa uno dei due fuochi.
- Seconda Legge: un corpo celeste percorre aree uguali in tempi uguali, che corrisponde a velocità areolare costante: $\frac{dA}{dt} = \frac{h}{2}$
- Terza Legge: il quadrato del periodo di un'orbita è proporzionale al cubo del semiasse maggiore.

Siano:

$T = \text{periodo dell'orbita}$

$\mu = Gm_{SUN}$

$G = \text{costante di gravitazione universale}$

$a = \text{semiasse maggiore dell'orbita}$

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}} a^{\frac{3}{2}} \text{ descrive il periodo dell'orbita}$$

$$\text{la quale elevata al quadrato fornisce: } T^2 = \frac{2\pi^2}{\mu} a^3$$

$$\text{dove il rapporto: } \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}} = \text{costante quindi } T^2 = K^2 a^3$$

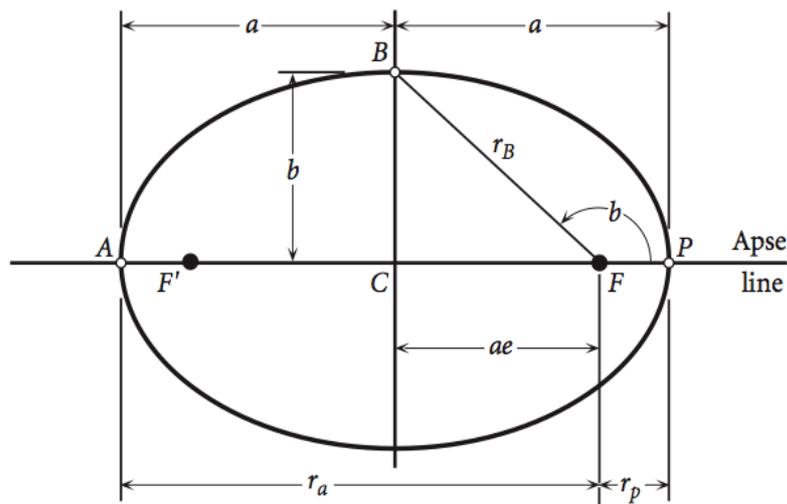


Fig 1: Orbita Ellittica - Da "Orbital Mechanics for Engineering Students" - Howard Curtiss - Elsevier (l'angolo non è b ma θ)

L'equazione del moto, combinando la prima Legge di Newton con l'equazione che regola la forza di attrazione che si genera tra due corpi di massa m_1 e m_2 , si ottiene l'equazione base per definire il moto di un corpo attorno ad un altro (two-body problem equation):

$$\ddot{\vec{r}} = -\left(\frac{\mu}{r^3}\right)\vec{r}$$

la quale, dopo una serie di passaggi algebrici, porta all'equazione che definisce il raggio dall'orbita in funzione dell'eccentricità e , dell'anomalia vera (angolo tra il pericentro e la posizione dello spacecraft all'istante considerato) θ , del momento angolare specifico $\vec{h} = \vec{r} \times \dot{\vec{r}}$ e della costante $\mu = Gm_{sun}$.

$$r = \frac{h^2}{\mu} \frac{1}{1 + e \cos \theta}$$

Come ulteriore definizione, non meno importante di altre, si definisce l'energia specifica dell'orbita, che per il caso dell'orbita ellittica sarà:

$$\varepsilon = \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} = -\frac{\mu}{2a}$$

la quale, come subito si può denotare è costante lungo l'orbita.

L'orbita presenta due punti, in corrispondenza di $\theta = \pi$ che corrisponde all'altezza massima dell'orbita detta *apocentro*, come si può dedurre dall'equazione appena rappresentata, ed in corrispondenza di $\theta = 0$ dove si ha l'altezza minima dell'orbita detta *pericentro*.

Un'importantissima relazione è che il momento angolare specifico h si conserva sempre, difatti:

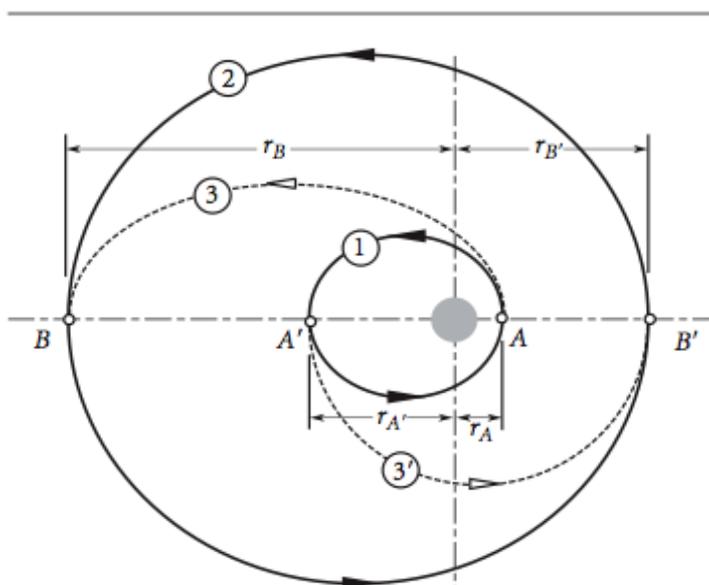
$$\frac{d\vec{h}}{dt} = \dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}} + \vec{r} \times \ddot{\vec{r}} = 0 + \vec{r} \times \left(-\frac{\mu}{r^3}\vec{r}\right) = 0 \quad .$$

Manovre alla Hohmann:

Considerando *manovre impulsive*, ovvero che avvengono in un istante di tempo infinitesimo dt , l'ingegnere tedesco *Walter Hohmann* ipotizzò manovre che permettessero di spostarsi tra orbite a maggiore e minore energia specifica con una minima variazione di velocità, e quindi di propellente.

Il momento angolare specifico nei punti di pericentro e apocentro, infatti, presenta la sola componente perpendicolare della velocità, perciò in tali condizioni può essere applicata una variazione di velocità, e quindi variazione di h , che cambierà la forma dell'orbita senza variare la direzione della linea degli apsidi, comportando quindi un minore dispendio in termini di Δv e quindi di propellente.

In breve possiamo definire una semplice manovra alla Hohmann come un trasferimento tra due orbite effettuato mediante un Δv applicato al perigeo dell'orbita di partenza per “alzare” la quota di apogeo ed un Δv applicato all'apogeo dell'orbita di trasferimento per “circularizzare” l'orbita, ovvero raggiungere una velocità tale da permettere all'orbita di trasferimento di portarsi ad eccentricità nulla $e=0$ realizzando così un'orbita circolare di altezza pari alla quota di apogeo dell'orbita di trasferimento così determinata.



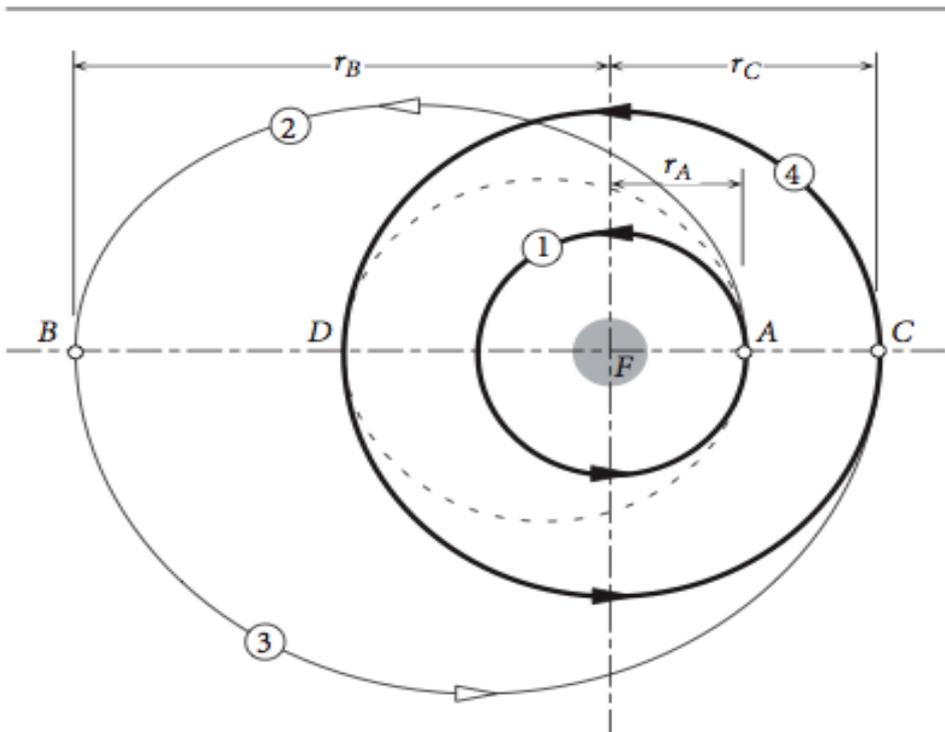
Hohmann transfers between coaxial elliptical orbits. In this illustration, $r_{A'}/r_0 = 3$, $r_B/r_0 = 8$ and $r_{B'}/r_0 = 4$.

Fig 2: Hohmann Transfer - "Orbital Mechanics for Engineering Students" - H.Curtiss - Elsevier

Nella trattazione a seguire, vi sarà un'analisi di confronto con un'orbita di trasferimento Bi-Ellittica.

Una manovra di trasferimento alla Hohmann bi-ellittica può essere definita come una manovra che presenta due semi-ellissi di trasferimento, la prima che presenta un apogeo di quota maggiore rispetto a quella di destinazione (il perigeo è sempre la quota dell'orbita di partenza) e una seconda semi-ellisse che presenterà come perigeo la quota dell'orbita di destinazione.

Vi avranno luogo tre Δv , uno al perigeo della prima semi-ellisse, uno all'apogeo della prima semi-ellisse di trasferimento ed uno, questa volta applicato in direzione contraria, al perigeo della seconda ellisse di trasferimento, che si presenterà quindi alla quota dell'orbita di arrivo.



Bi-elliptic transfer from inner orbit 1 to outer orbit 4.

Fig 3: Trasferimento Bi-Ellittico - "Orbital Mechanics for Engineering Students" - H. Curtiss - Elsevier

Come vedremo, una manovra bi-ellittica converrà rispetto ad una semplice manovra di Hohmann, ovvero presenterà un Δv minore di quello di una semplice manovra alla Hohmann, solo quando il rapporto tra il raggio dell'orbita di arrivo e quello dell'orbita di partenza supererà il valore di 15.

Descrizione progetto:

Considereremo l'analisi di una manovra alla Hohmann per un trasferimento da un'orbita LEO (Low Earth Orbit) ad un'orbita GEO (GEostationary Orbit) sfruttando una semplice manovra alla Hohmann ed una manovra alla Hohmann Bi-Ellittica.

Un'orbita geostazionaria, è un'orbita equatoriale che presenta una velocità angolare ω dello spacecraft identica a quella di rotazione della Terra.

Tale orbita permette allo spacecraft di rimanere fisso su un punto, detto in termini astronomici, la posizione del *nadir* non varia con il tempo.

L'orbita geostazionaria è sfruttata da satelliti per telecomunicazioni, satelliti GPS e satelliti meteorologici oltre che da satelliti per applicazioni militari.

La formula che determina quanto vale il raggio a cui lo spacecraft viene posizionato per raggiungere tale orbita è:

$$r_{geos} = \sqrt[3]{\mu \frac{T_{rot}^2}{4\pi^2}} = 42168 \text{ km}$$

Le **ipotesi** di tali analisi saranno:

le manovre avranno carattere impulsivo, quindi l'applicazione dei Δv avverrà in modo istantaneo;

l'orbita di partenza avrà luogo ad una quota $z=300 \text{ km}$;

l'orbita di arrivo sarà ad una distanza $r_{geos} = 42168 \text{ km}$;

le due orbite, di partenza e di arrivo (così come per le due ellissi di trasferimento) saranno complanari ed equatoriali;

si trascurano gli effetti gravitazionali dovuti al Sole e agli altri pianeti.

Orbita di partenza – LEO:

L'orbita di partenza presenterà quindi una quota

$$r_{LEO} = r_{Earth} + z = 6378 + 300 = 6678 \text{ km} \quad \text{di eccentricità} \quad e = 0$$

per l'orbita circolare LEO, la velocità sarà:

$$v_{leo} = \sqrt{\frac{\mu}{r_{leo}}} = \sqrt{\frac{398600}{6678}} = 7.726 \text{ km/s}$$

Orbita di arrivo – GEO:

L'orbita di arrivo presenterà una quota

$$r_{geo} = 42618 \text{ km} \quad \text{di eccentricità} \quad e = 0$$

per l'orbita geostazionaria, la velocità sarà:

$$v_{geo} = \sqrt{\frac{\mu}{r_{geo}}} = \sqrt{\frac{398600}{42618}} = 3.058 \text{ km/s}$$

(Bi-ellittica)

Orbita di trasferimento – GTO1:

Per quanto concerne l'orbita bi-ellittica imponiamo l'apogeo della prima orbita di trasferimento:

$r_{a.GTO} = 70000 \text{ km}$ che sarà identico al raggio di apogeo della seconda orbita di trasferimento.

I semiassi maggiori delle due orbite di trasferimento saranno:

$$a_{GTO1} = \frac{r_{LEO} + r_{a.GTO}}{2} = 38339 \text{ km}$$
$$a_{GTO2} = \frac{r_{a.GTO2} + r_{GEO}}{2} = \frac{r_{a.GTO1} + r_{GEO}}{2} = 56309 \text{ km}$$

Allego di seguito le righe di codice in MATLAB implementanti l'algoritmo di risoluzione del problema:

MANOVRA DI HOHMANN DIRETTA

```
% Equatorial LEO --> GEO Hohmann TRANSFER

clear all           % svuota il workspace
close all          % chiude tutte le figure aperte
clc                % svuota la finestra dei comandi
format long g     % imposta la virgola doppia per i risultati in
uscita

mu_Earth = 398600.4; %imposto i valori iniziali di GM e del Raggio
della Terra
R_E = 6378.14;

% LEO data - Dati riguardanti l'orbita LEO di partenza
r_perigee_LEO = R_E + 300; %definisco il raggio
ecc_LEO = 0.01; %definisco l'eccentricità
SemMajAx_LEO = r_perigee_LEO / (1 - ecc_LEO); %semiassemaggiore
r_apogee_LEO = SemMajAx_LEO*(1 + ecc_LEO); %raggio di apogeo
p_LEO = SemMajAx_LEO * ( 1 - ecc_LEO^2 ); %raggio di perigeo
Velocity_LEO_perigee = sqrt(mu_Earth/r_perigee_LEO);%velocità al
perigeo
h_LEO=r_perigee_LEO*Velocity_LEO_perigee; % momento angolare
specifico
theta = [0:0.001:2*pi]; %campo di valori dell'anomalia vera (da 0
a 360°)

% Orbital radius array [km] - Qui avviene la definizione
dell'orbita da plottare sul
% grafico, definito p_LEO un generico punto della LEO:
radius = p_LEO ./ ( 1 + ecc_LEO * cos(theta) );

X_ORBIT_LEO = cos(theta) .* radius;
Y_ORBIT_LEO = sin(theta) .* radius;
Z_ORBIT_LEO = 0.0 .* radius;

figure(11)

% Earth ellipsoid - Plottaggio del Pianeta Terra e applicazione
delle
% textures sulla superficie della sfera
TERRA = imread('planisphere.jpg','jpg');
props.FaceColor='texture';
props.EdgeColor='none';
props.FaceLighting='phong';
props.Cdata = TERRA;
Center = [0; 0; 0];
[XX, YY, ZZ] =
ellipsoid(Center(1),Center(2),Center(3),R_E,R_E,R_E,30);
surface(-XX, -YY, -ZZ,props);
hold on

% Satellite orbit - Plottaggio dell'orbita del satellite in LEO
plot3(X_ORBIT_LEO,Y_ORBIT_LEO,Z_ORBIT_LEO,'LineWidth',2.0)
```

```
hold on
```

```
% GTO - Geotransfer orbit - Definizione dell'orbita di
trasferimento
r_perigee_GTO = r_perigee_LEO;
r_apogee_GTO = 42168;
SemMajAx_GTO = 0.5*(r_apogee_GTO + r_perigee_GTO);
ecc_GTO = (r_apogee_GTO - r_perigee_GTO)/(r_apogee_GTO +
r_perigee_GTO);
p_GTO = SemMajAx_GTO * ( 1 - ecc_GTO^2 );
h_GTO = sqrt(SemMajAx_GTO*mu_Earth*(1-ecc_GTO^2)); % h della
ellisse di trasferimento
v_perigee_GTO =h_GTO/r_perigee_GTO; % velocità al perigeo della
ellisse di trasferimento
v_apogee_GTO = h_GTO/r_apogee_GTO; % velocità all'apogeo della
ellisse di trasferimento
dV_GTO= v_perigee_GTO- Velocity_LEO_perigee; % Primo dV
theta = [0:0.001:pi];
```

```
radius = p_GTO ./ ( 1 + ecc_GTO * cos(theta) ); % Plottaggio
dell'orbita di trasferimento
X_ORBIT_GTO = cos(theta) .* radius;
Y_ORBIT_GTO = sin(theta) .* radius;
Z_ORBIT_GTO = theta .* 0.0 .* radius;
plot3(X_ORBIT_GTO,Y_ORBIT_GTO,Z_ORBIT_GTO,'g-','LineWidth',2.0)
```

```
% GEO - Geostationary orbit - Definizione dell'orbita
geostazionaria e plottaggio della stessa
r_GEO = r_apogee_GTO;
ecc_GEO = 0.0;
Velocity_GEO_perigee = sqrt(mu_Earth/r_GEO); %Velocità in orbita
Geostazionaria
h_GEO=r_apogee_GTO*Velocity_GEO_perigee; %Momento angolare
specifico dell'orbita geostazionaria
dV_GEO= Velocity_GEO_perigee - v_apogee_GTO; %Delta v di
circolarizzazione dell'orbita
theta = [0:0.001:2*pi];
X_ORBIT_GEO = cos(theta) .* r_GEO;
Y_ORBIT_GEO = sin(theta) .* r_GEO;
Z_ORBIT_GEO = theta .* 0.0 .* r_GEO;
plot3(X_ORBIT_GEO,Y_ORBIT_GEO,Z_ORBIT_GEO,'LineWidth',2.0)
```

```
%Calcolo dei dV
dv_1= v_perigee_GTO - Velocity_LEO_perigee;
dv_2= Velocity_GEO_perigee - v_apogee_GTO;
dv_totale=dv_1 + dv_2;
```

```
grid on % Definizione degli assi su cui fare riferimento
nell'immagine dell'orbita
axis equal
xlabel('X [km]')
ylabel('Y [km]')
zlabel('Z [km]')
title('3D orbit')
view( [0 0 1] )
```

```
r_MOON = 384399; %Definizione dell'Orbita e della forma della Luna
ecc_GEO = 0.0549;
scale = 1.0;
R_M = 1738.14 * scale;
```

```

theta = [0:0.001:2*pi];
X_ORBIT_MOON = cos(theta) .* r_MOON;
Y_ORBIT_MOON = sin(theta) .* r_MOON;
Z_ORBIT_MOON = theta .* 0.0 .* r_MOON;
plot3(X_ORBIT_MOON,Y_ORBIT_MOON,Z_ORBIT_MOON,'LineWidth',2.0)
MOON = imread('moonpl.jpg','jpg'); % Applicazione della texture
sul geotide
props.FaceColor='texture';
props.EdgeColor='none';
props.FaceLighting='phong';
props.Cdata = MOON;
Center = [r_MOON; 0; 0];
[XX, YY, ZZ] =
ellipsoid(Center(1),Center(2),Center(3),R_M,R_M,R_M,30);
surface(-XX, -YY, -ZZ,props);
view( [1 1 1] )

%Stampa dei risultati
fprintf(' Orbita LEO \n');
fprintf('-----\n');
fprintf(' Velocità del satellite in orbita circolare LEO: %.5f
km/s \n', Velocity_LEO_perigee );
fprintf(' Momento angolare specifico del satellite in orbita
circolare LEO: %.5f km^2/s \n', h_LEO);
fprintf('-----\n');
fprintf('Ellisse di trasferimento GTO \n');
fprintf('-----\n');
fprintf(' Semiasse maggiore della ellisse di trasferimento: %.3f
km \n', SemMajAx_GTO);
fprintf(' Eccentricità della ellisse di trasferimento: %.5f \n',
ecc_GTO);
fprintf(' Velocità al perigeo della ellisse di trasferimento: %.5f
km/s \n', v_perigee_GTO);
fprintf(' Velocità all''apogeo della ellisse di trasferimento:
%.5f km/s \n', v_apogee_GTO);
fprintf(' Momento angolare specifico ellisse di trasferimento:
%.5f km^2/s \n', h_GTO);
fprintf(' Primo dV: %.6f km/s \n', dv_1);
fprintf(' Secondo dV: %.6f km/s \n', dv_2);
fprintf('-----\n');
fprintf('Orbita Geostazionaria \n');
fprintf('-----\n');
fprintf('Velocità nell''orbita geostazionaria %.5f km/s \n',
Velocity_GEO_perigee);
fprintf('-----\n');
fprintf(' dV totale: %.6f km/s \n', dv_totale);

-----Fine del primo algoritmo-----

```

Risultati:

Orbita LEO

Velocità del satellite in orbita circolare LEO: 7.72576 km/s
Momento angolare specifico del satellite in orbita circolare LEO: 51593.69414 km²/s

Ellisse di trasferimento GTO

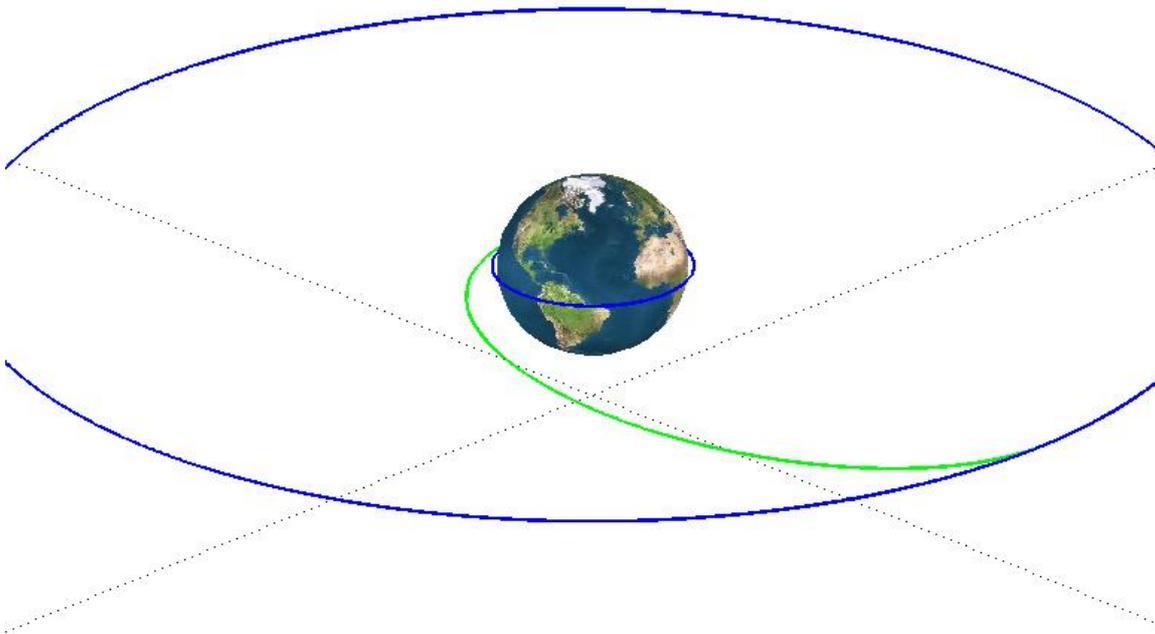
Semiasse maggiore della ellisse di trasferimento: 24423.070 km
Eccentricità della ellisse di trasferimento: 0.72656
Velocità al perigeo della ellisse di trasferimento: 10.15155 km/s
Velocità all'apogeo della ellisse di trasferimento: 1.60770 km/s
Momento angolare specifico ellisse di trasferimento: 67793.49115 km²/s
Primo dV: 2.425795 km/s
Secondo dV: 1.466820 km/s

Orbita Geostazionaria

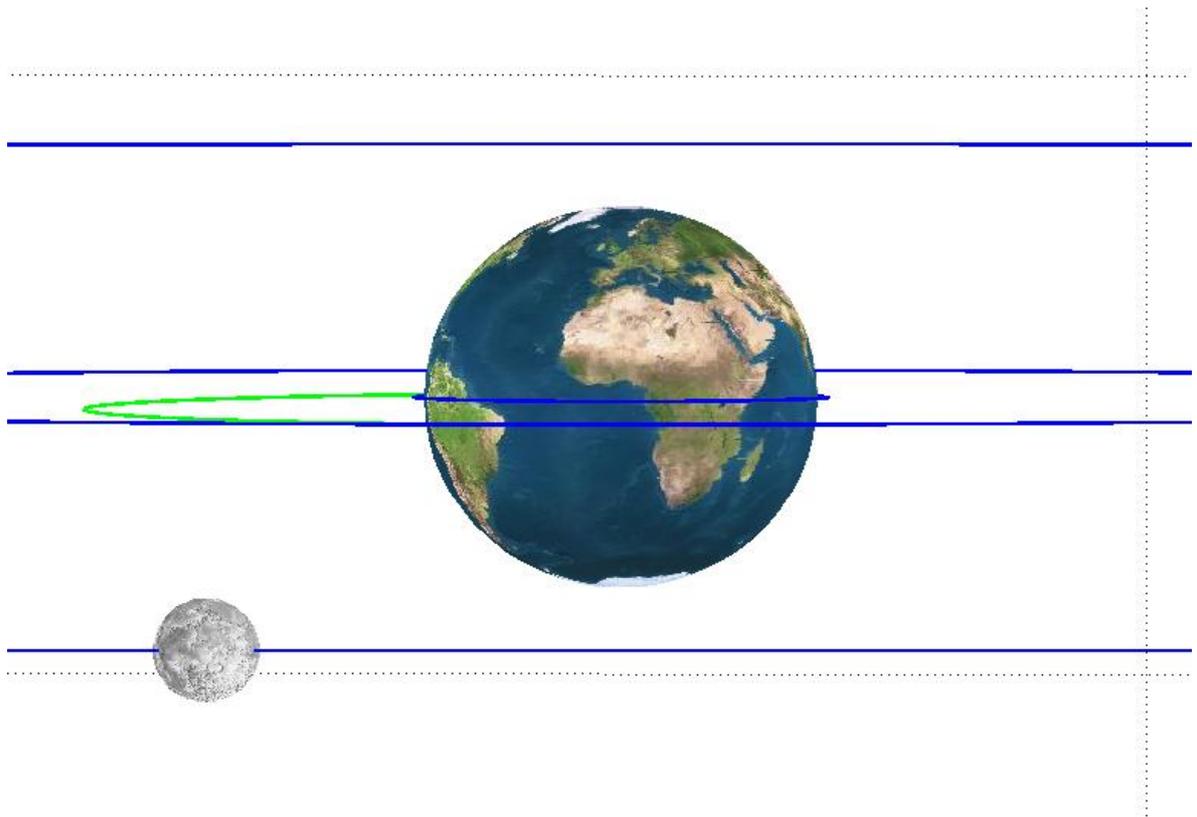
Velocità nell'orbita geostazionaria 3.07452 km/s

dV totale: 3.892615 km/s

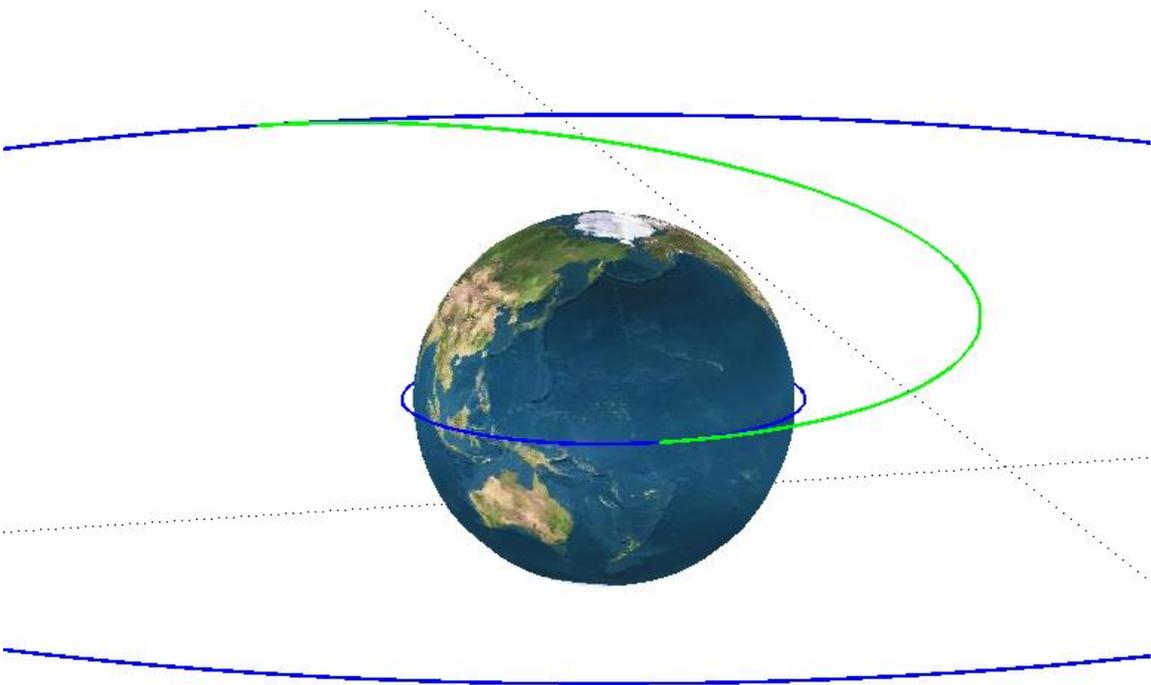
Allego qui di seguito le immagini risultanti dall'esecuzione dell'algoritmo:



Particolare della Terra e delle orbite di trasferimento (in verde) e di arrivo (in blu).



Particolare del Sistema Terra-Luna e delle varie Orbite.



Viste della manovra di Hohmann da angolature diverse.

Viste della manovra di Hohmann da angolature diverse.



MANOVRA DI HOHMANN BI-ELLITTICA

```
% Equatorial LEO --> GEO Hohmann TRANSFER

clear all           % svuota il workspace
close all          % chiude tutte le figure aperte
clc                % svuota la finestra dei comandi
format long g     % imposta la virgola doppia per i risultati in
uscita

mu_Earth = 398600.4;%imposto le variabili di mu e del raggio della
Terra
R_E = 6378.14;

% LEO data - Impostazione dei dati per l'orbita LEO
r_perigee_LEO = R_E + 300;
ecc_LEO = 0.01;
SemMajAx_LEO = r_perigee_LEO / (1 - ecc_LEO);
r_apogee_LEO = SemMajAx_LEO*(1 + ecc_LEO);
p_LEO = SemMajAx_LEO * ( 1 - ecc_LEO^2 );
Velocity_LEO_perigee = sqrt(mu_Earth/r_perigee_LEO); % velocità
dello spacecraft sulla LEO
h_LEO=r_perigee_LEO*Velocity_LEO_perigee; % momento angolare
specifico
theta = [0:0.001:2*pi];

% Orbital radius array [km] - Definizione dell'orbita da plottare
nel grafico
radius = p_LEO ./ ( 1 + ecc_LEO * cos(theta) );

X_ORBIT_LEO = cos(theta) .* radius;
Y_ORBIT_LEO = sin(theta) .* radius;
Z_ORBIT_LEO = 0.0 .* radius;

figure(11)

% Earth ellipsoid - Definizione del geoide che rappresenta la
Terra
TERRA = imread('planisphere.jpg','jpg');
props.FaceColor='texture';
props.EdgeColor='none';
props.FaceLighting='phong';
props.Cdata = TERRA;
Center = [0; 0; 0];
[XX, YY, ZZ] =
ellipsoid(Center(1),Center(2),Center(3),R_E,R_E,R_E,30);
surface(-XX, -YY, -ZZ,props);
hold on

% Satellite orbit - Plottaggio dell'orbita del satellite
plot3(X_ORBIT_LEO,Y_ORBIT_LEO,Z_ORBIT_LEO,'LineWidth',2.0)
hold on

%Bi-elliptic trajectories first elliptical orbit
% GTO - Geotransfer orbit - Definizione della prima semiellisse di
% trasferimento.
r_perigee_GTO = r_perigee_LEO;
r_apogee_GTO = 70000;
```

```

SemMajAx_GTO = 0.5*(r_apogee_GTO + r_perigee_GTO);
ecc_GTO = (r_apogee_GTO - r_perigee_GTO)/(r_apogee_GTO +
r_perigee_GTO);
h_GTO = sqrt(SemMajAx_GTO*mu_Earth*(1-ecc_GTO^2)); % h della prima
semiellisse di trasferimento
v_perigee_GTO =h_GTO/r_perigee_GTO; % velocità al perigeo della
prima semiellisse di trasferimento
v_apogee_GTO = h_GTO/r_apogee_GTO; % velocità all'apogeo della
prima semiellisse di trasferimento
dV_GTO= v_perigee_GTO- Velocity_LEO_perigee; % Primo dV
p_GTO = SemMajAx_GTO * ( 1 - ecc_GTO^2 );
theta = [0:0.001:pi];

radius = p_GTO ./ ( 1 + ecc_GTO * cos(theta) );% Definizione
dell'orbita da plottare
X_ORBIT_GTO = cos(theta) .* radius;
Y_ORBIT_GTO = sin(theta) .* radius;
Z_ORBIT_GTO = theta .* 0.0 .* radius;
plot3(X_ORBIT_GTO,Y_ORBIT_GTO,Z_ORBIT_GTO,'g-','LineWidth',2.0)

%Bi-elliptic trajectories second elliptical orbit
% GTO2 - Geotransfer orbit2 - Definizione della seconda
semiellisse di
% trasferimento.
r_perigee_GTO2 = 42168;
r_apogee_GTO2 = r_apogee_GTO ;
SemMajAx_GTO2 = 0.5*(r_apogee_GTO2 + r_perigee_GTO2);
ecc_GTO2 = (r_apogee_GTO2 - r_perigee_GTO2)/(r_apogee_GTO2 +
r_perigee_GTO2);
h_GTO2 = sqrt(SemMajAx_GTO2*mu_Earth*(1-ecc_GTO2^2)); % h della
seconda semiellisse di trasferimento
v_apogee_GTO2 =h_GTO2/r_apogee_GTO2; % velocità al perigeo della
seconda semiellisse di trasferimento
dV_GTO2= v_apogee_GTO2- v_apogee_GTO; % Secondo dV
v_perigee_GTO2=h_GTO2/r_perigee_GTO2; % velocità al perigeo della
seconda semiellisse di trasferimento
p_GTO2 = SemMajAx_GTO2 * ( 1 - ecc_GTO2^2 );
theta = [pi:0.001:2*pi];

radius = p_GTO2 ./ ( 1 + ecc_GTO2 * cos(theta) );
X_ORBIT_GTO2 = cos(theta) .* radius;
Y_ORBIT_GTO2 = sin(theta) .* radius;
Z_ORBIT_GTO2 = theta .* 0.0 .* radius;
plot3(X_ORBIT_GTO2,Y_ORBIT_GTO2,Z_ORBIT_GTO2,'g-','LineWidth',2.0)

% GEO - Geostationary orbit
r_GEO = r_perigee_GTO2;
ecc_GEO = 0.0;
Velocity_GEO_perigee = sqrt(mu_Earth/r_GEO);
dV_circ=Velocity_GEO_perigee-v_perigee_GTO2; % dV all'arrivo
all'orbita stazionaria
dV_totale = dV_GTO + dV_GTO2 + abs(dV_circ); % calcolo del dV
totale al termine dell'intera manovra di trasferimento
theta = [0:0.001:2*pi];
X_ORBIT_GEO = cos(theta) .* r_GEO;
Y_ORBIT_GEO = sin(theta) .* r_GEO;
Z_ORBIT_GEO = theta .* 0.0 .* r_GEO;
plot3(X_ORBIT_GEO,Y_ORBIT_GEO,Z_ORBIT_GEO,'LineWidth',2.0)

```

```

grid on
axis equal
xlabel('X [km]')
ylabel('Y [km]')
zlabel('Z [km]')
title('3D orbit')
view( [0 0 1] )

r_MOON = 384399;% plottaggio della Luna e della sua Orbita
ecc_GEO = 0.0549;
scale = 1.0;
R_M = 1738.14 * scale;
theta = [0:0.001:2*pi];
X_ORBIT_MOON = cos(theta) .* r_MOON;
Y_ORBIT_MOON = sin(theta) .* r_MOON;
Z_ORBIT_MOON = theta .* 0.0 .* r_MOON;
plot3(X_ORBIT_MOON,Y_ORBIT_MOON,Z_ORBIT_MOON,'LineWidth',2.0)
MOON = imread('moonpl.jpg','jpg'); % applicazione delle textures
props.FaceColor='texture';
props.EdgeColor='none';
props.FaceLighting='phong';
props.Cdata = MOON;
Center = [r_MOON; 0; 0];
[XX, YY, ZZ] =
ellipsoid(Center(1),Center(2),Center(3),R_M,R_M,R_M,30);
surface(-XX, -YY, -ZZ,props);
view( [1 1 1] )

%Stampa dei risultati
fprintf(' Orbita LEO \n');
fprintf('-----\n');
fprintf(' Velocità del satellite in orbita circolare LEO: %.5f\n', Velocity_LEO_perigee );
fprintf(' Momento angolare specifico del satellite in orbita circolare LEO: %.5f km^2/s \n', h_LEO);
fprintf('-----\n');
fprintf('Prima semiellisse di trasferimento GTO \n');
fprintf('-----\n');
fprintf(' Semiasse maggiore della prima semiellisse di trasferimento: %.3f km \n', SemMajAx_GTO);
fprintf(' Eccentricità della prima semiellisse di trasferimento: %.5f \n', ecc_GTO);
fprintf(' Velocità al perigeo della prima semiellisse di trasferimento: %.5f km/s \n', v_perigee_GTO);
fprintf(' Velocità all''apogeo della prima semiellisse di trasferimento: %.5f km/s \n', v_apogee_GTO);
fprintf(' Momento angolare specifico della prima semiellisse di trasferimento: %.5f km^2/s \n', h_GTO);
fprintf(' Primo dV: %.6f km/s \n', dV_GTO);
fprintf('-----\n');
fprintf('Seconda semiellisse di trasferimento GTO2 \n');
fprintf('-----\n');
fprintf(' Semiasse maggiore della seconda semiellisse di trasferimento: %.3f km \n', SemMajAx_GTO2);
fprintf(' Eccentricità della seconda semiellisse di trasferimento:

```

```

%.5f \n', ecc_GTO2);
fprintf(' Velocità al perigeo della seconda semiellisse di
trasferimento: %.5f km/s \n', v_perigee_GTO2);
fprintf(' Velocità all''apogeo della seconda semiellisse di
trasferimento: %.5f km/s \n', v_apogee_GTO2);
fprintf(' Momento angolare specifico della seconda semiellisse di
trasferimento: %.5f km^2/s \n', h_GTO2);
fprintf(' Secondo dV: %.6f km/s \n', dV_GTO2);
fprintf(' Circolarizzazione dell''orbita risultati finali \n');
fprintf('-----\n');
fprintf('dV di arrivo, negativo in quanto si tratta di una
"frenata": %.5f km/s \n', dV_circ);
fprintf('Risultato del dV totale: %.5f km/s \n', dV_totale);
fprintf('-----\n');

```

-----Fine Secondo Algoritmo-----

Risultati:

Orbita LEO

```

-----
Velocità del satellite in orbita circolare LEO: 7.72576 km/s
Momento angolare specifico del satellite in orbita circolare LEO: 51593.69414
km^2/s
-----

```

Prima semiellisse di trasferimento GTO

```

-----
Semiasse maggiore della prima semiellisse di trasferimento: 38339.070 km
Eccentricità della prima semiellisse di trasferimento: 0.82581
Velocità al perigeo della prima semiellisse di trasferimento: 10.43925 km/s
Velocità all'apogeo della prima semiellisse di trasferimento: 0.99593 km/s
Momento angolare specifico della prima semiellisse di trasferimento:
69714.77946 km^2/s
Primo dV: 2.713493 km/s
-----

```

Seconda semiellisse di trasferimento GTO2

```

-----
Semiasse maggiore della seconda semiellisse di trasferimento: 56084.000 km
Eccentricità della seconda semiellisse di trasferimento: 0.24813
Velocità al perigeo della seconda semiellisse di trasferimento: 3.43484 km/s
Velocità all'apogeo della seconda semiellisse di trasferimento: 2.06915 km/s
Momento angolare specifico della seconda semiellisse di trasferimento:
144840.46032 km^2/s
Secondo dV: 1.073224 km/s
Circolarizzazione dell'orbita risultati finali
-----

```

```

-----
dV di arrivo, negativo in quanto si tratta di una "frenata": -0.36032 km/s
-----

```

Orbita Geostazionaria

```

-----
Velocità nell'orbita geostazionaria 3.07452 km/s
-----

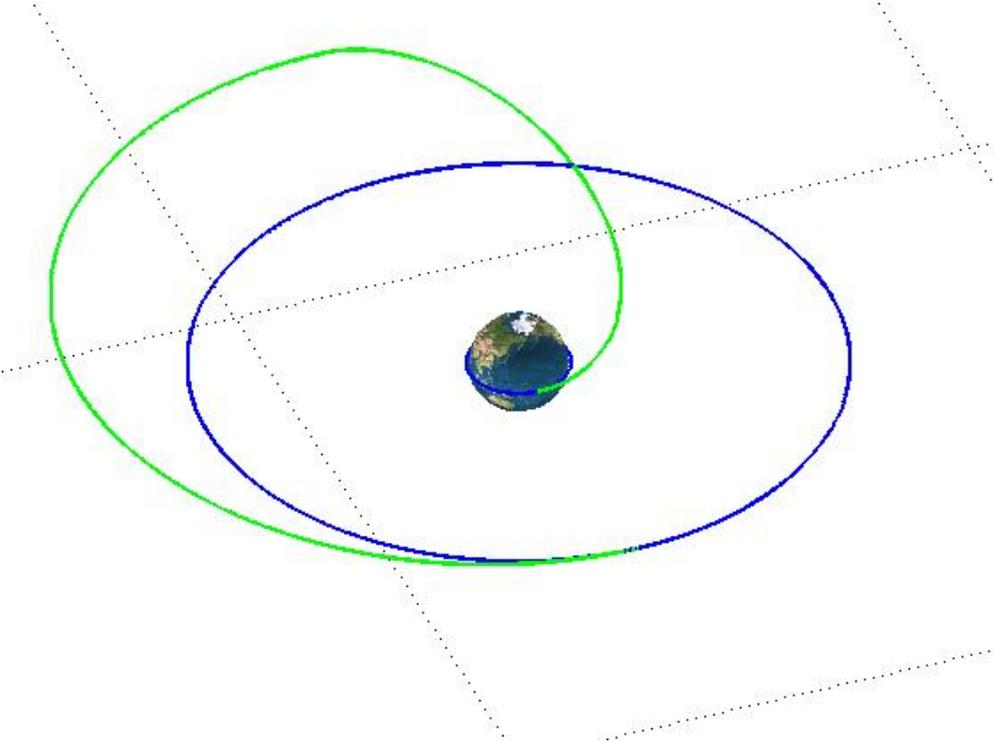
```

```

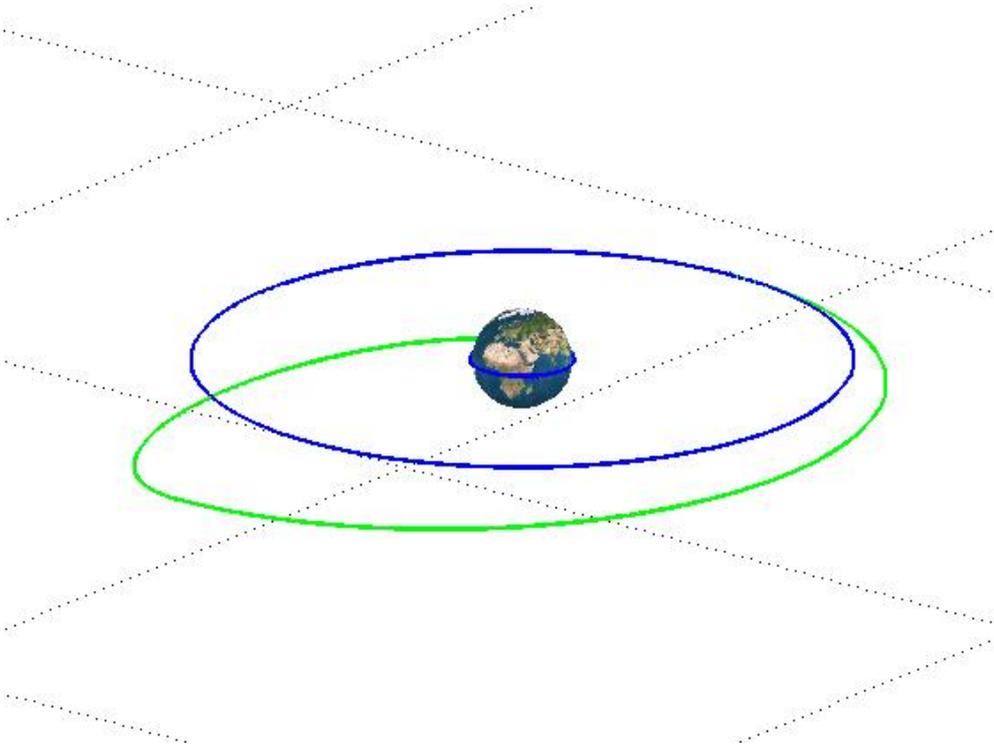
-----
Risultato del dV totale: 4.14704 km/s
-----

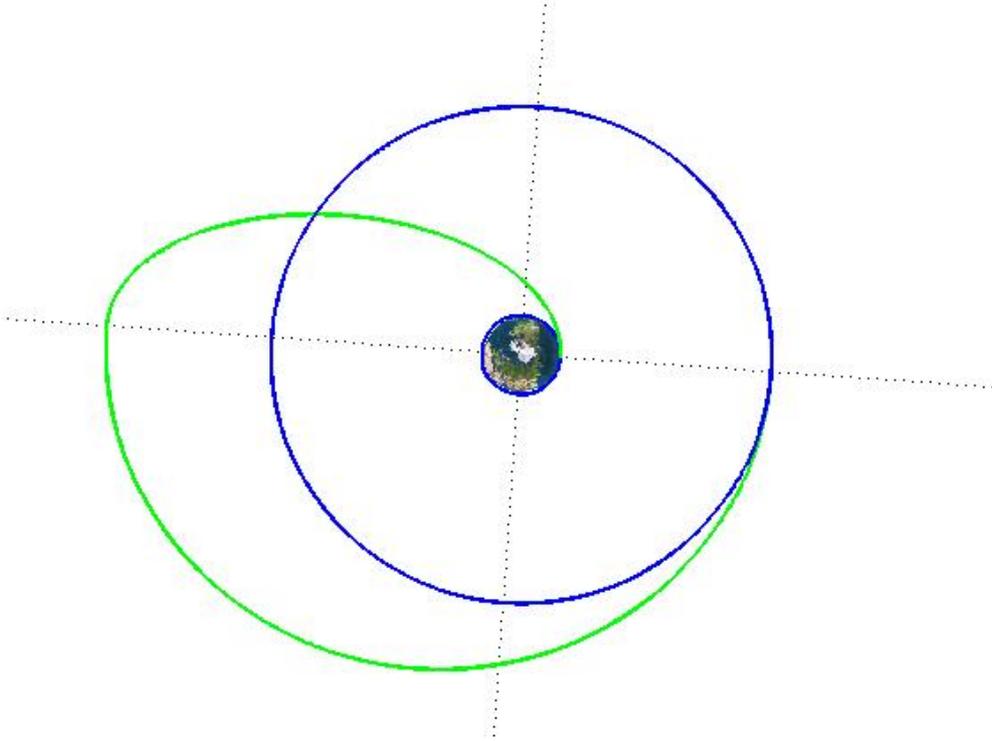
```

Allego qui una serie di immagini tratte da MATLAB rappresentanti la manovra bi-ellittica appena esaminata:



Vista da diverse angolature:





Conclusioni:

Le analisi svolte portano alla conclusione che, come anche accennato nella parte teorica di questa relazione, una manovra alla Hohmann diretta, in questo caso, risulta più conveniente rispetto ad una manovra alla Hohmann bi-ellittica in quanto, raffrontando i due Δv :

$$\Delta v_{Hohmann} < \Delta v_{Bielliptic} \rightarrow 3.892615 \text{ km/s} < 4.14704 \text{ km/s}$$

Infatti il rapporto tra R_{GEO} e R_{LEO} risulta minore di 15.

Quindi, per portare un satellite in orbita geostazionaria, lo si lancia in orbita con inclinazione più vicina possibile allo zero, tramite i propulsori primari dei primi stadi del razzo vettore si corregge durante l'ascesa l'inclinazione dell'orbita, fino a portarla ad equatoriale, eventualmente con ultime correzioni di inclinazione già in orbita.

Una volta che il satellite è stabile in orbita LEO a 300 km (come in questo esempio), si accendono nuovamente i propulsori (probabilmente quelli dell'ultimo stadio) e si imprime un Δv tale da raggiungere il primo calcolato nella manovra di Hohmann semplice.

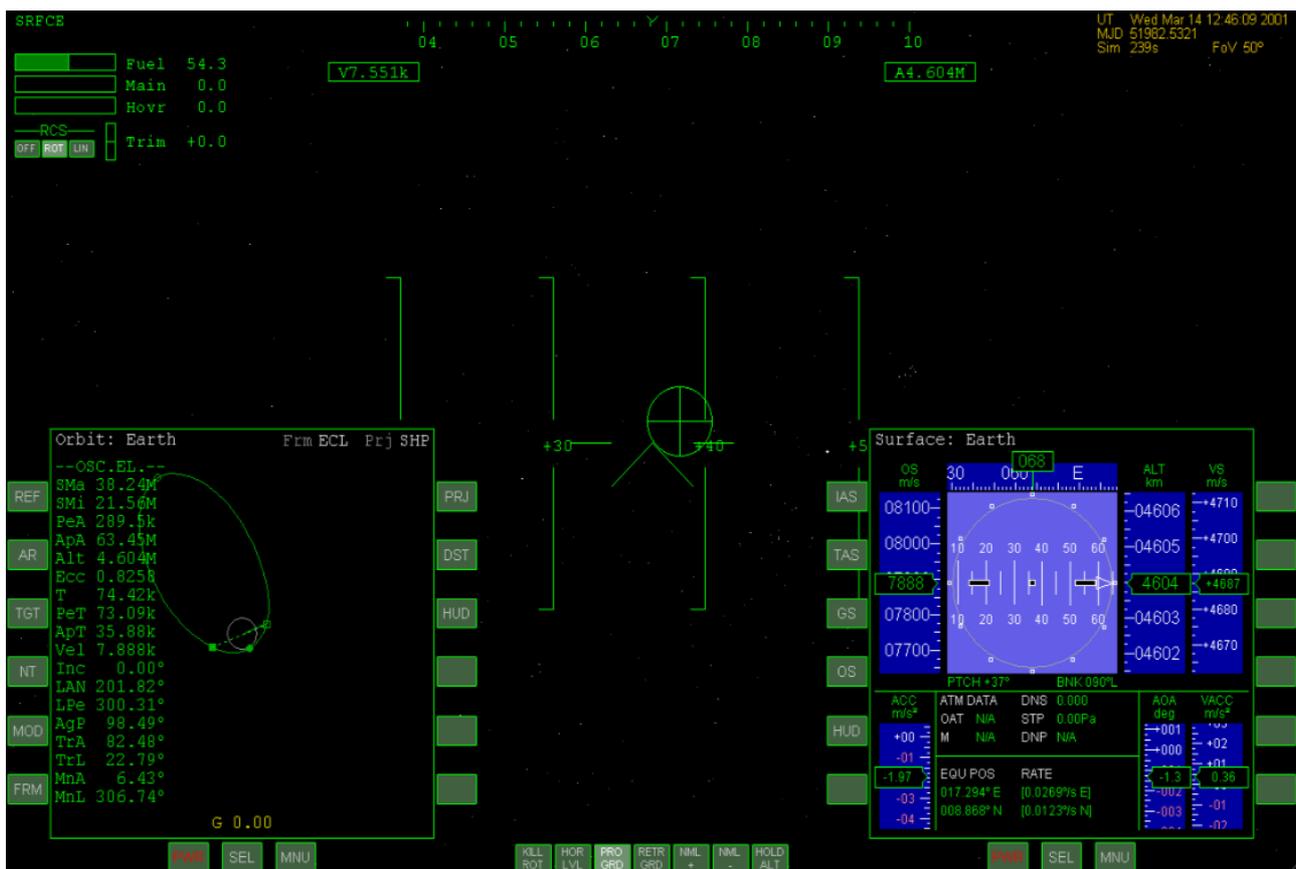
Si attende poi l'arrivo all'apogeo dell'orbita di trasferimento e si accendono nuovamente i propulsori per raggiungere la velocità necessaria a raggiungere quella dell'orbita Geostazionaria.

Contro analisi:

Tramite un simulatore molto accurato (es. utilizza interpolazioni polinomiali e metodi di Runge-Kutta per il calcolo della propagazione dei vettori di stato, tiene conto di perturbazioni dovute alla non sfericità dei pianeti ecc.) realizzato da Martin Schwigert (eventuali referenze su www.orbitersim.com), ricercatore presso l'università di Londra, ho potuto, in parte e non in maniera assolutamente precisa, simulare un trasferimento bi-ellittico LEO – GEO con l'ausilio dei dati raccolti nella stesura di questa relazione.

Presento in allegato tre immagini tratte dal simulatore con l'MFD rappresentante l'orbita corrente.

Nel primo si può notare la prima orbita di trasferimento 300 km – 70000km:



Ci troviamo poco dopo il perigeo della prima orbita di trasferimento.

Le voci PeA e ApA indicando le altezze di perigeo e di apogeo, per l'appunto $z_{LEO}=300$ km ca e $z_{GTO}=63450$ km ca.

L'eccentricità risulta 0.8253 come calcolato e il semi asse maggiore è di circa 38240 km anch'esso così calcolato.

Nella seconda immagine vediamo la seconda orbita di trasferimento, ovvero con apogeo a 70'000 km e perigeo di 42'168 km

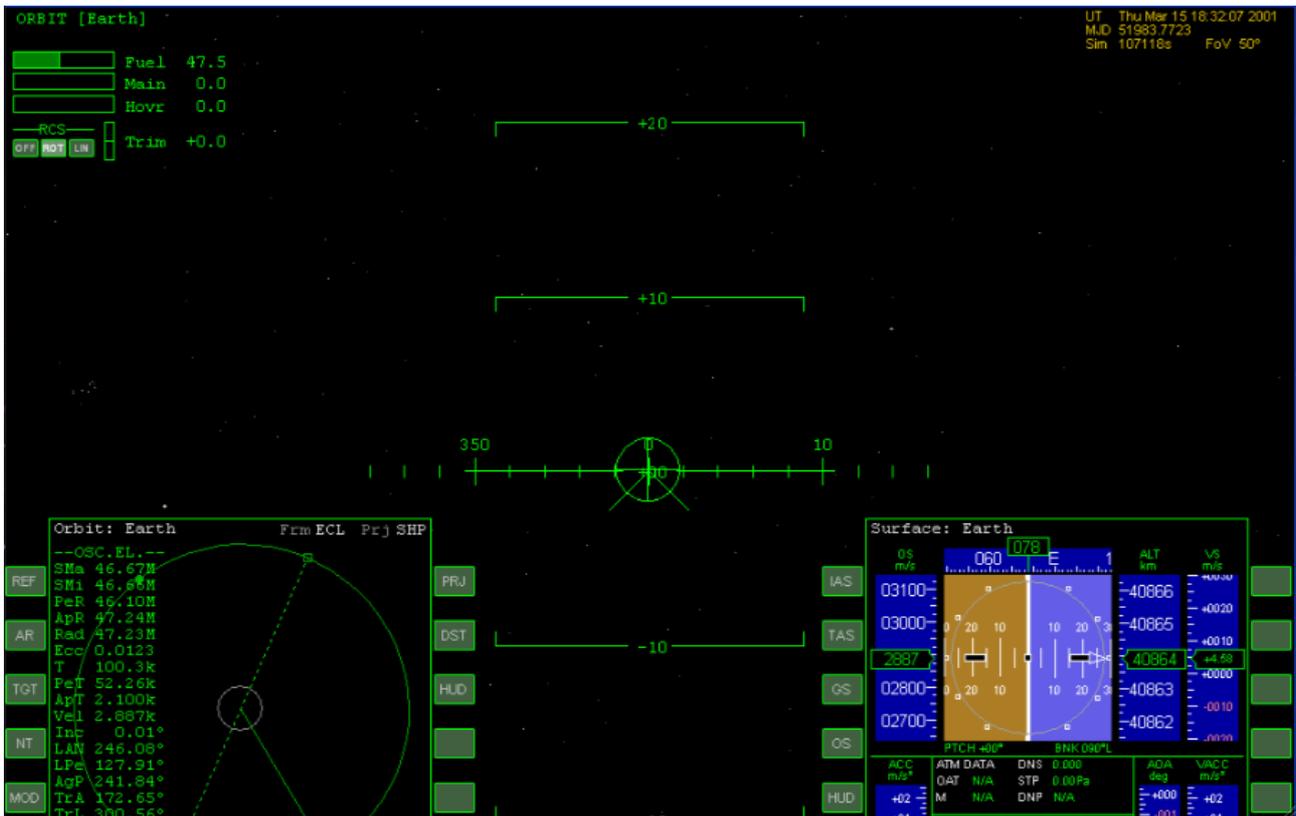


I valori non sono precisissimi, difatti si può leggere:

ApR (raggio di apogeo) = 70340 km

PeR (raggio di perigeo) = 47230 km

Nella terza immagine si vede l'orbita geostazionaria raggiunta a 42168 km:



Anche qui i valori non sono precisissimi, ma si parla comunque di:

ApR = 47240 km
 PeR = 46100 km
 e=0.0123

Con questa analisi sono così riuscito a verificare la correttezza dei dati da me ricavati attraverso un metodo un po' più "pratico". La non precisione dei dati deriva sia dall'approssimazione mia, molto ampia, delle manovre, sia dal fatto che nel simulatore viene tenuto conto delle interazioni gravitazionali dovute ad altri corpi celesti e dei gradienti di potenziali dovuti alla non perfetta sfericità del globo terrestre che inducono momenti deviatori sul veicolo spaziale.

Francesco Romano