

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA
FACOLTÀ DI SCIENZE MM. FF. NN.
DIPARTIMENTO DI ASTRONOMIA

TESI DI LAUREA

RICERCA DI STRUTTURE MONO E BI DIMENSIONALI
NELLA DISTRIBUZIONE DI MASSA SU GRANDE
SCALA DELL'UNIVERSO

Relatore

Ch.mo prof. Francesco Lucchin

Correlatore

Dott. Lauro Moscardini

Laureando

Turchetti Rubes

Ottobre 1996

Indice

| | |
|---------------------------------------------------------------|-----------|
| Introduzione | 1 |
| 1 Il quadro cosmologico | 5 |
| 1.1 Il principio cosmologico | 5 |
| 1.2 I modelli di Friedmann | 6 |
| 1.3 La teoria di Jeans | 9 |
| 1.4 Instabilità di Jeans nei modelli di Friedmann | 13 |
| 1.5 L'evoluzione delle perturbazioni | 15 |
| 1.6 Cenni sull'origine delle galassie | 21 |
| 1.7 L'approccio N-body alla fase non lineare | 22 |
| 2 Proprietà delle strutture su grande scala | 27 |
| 2.1 Le funzioni di correlazione: definizioni | 27 |
| 2.2 L'equazione di Limber | 29 |
| 2.3 La funzione di correlazione a due punti | 32 |
| 2.4 Le funzioni di correlazione a $N (> 2)$ punti | 35 |
| 2.5 Gli spettri di potenza | 36 |
| 2.6 Conteggi in celle (counts in cells) | 38 |
| 2.7 Topologia | 40 |
| 2.8 Analisi frattale | 43 |
| 3 Metodi statistici per l'individuazione dei filamenti | 47 |
| 3.1 Il minimal spanning tree (MST) | 47 |
| 3.2 Percolazione | 53 |

| | | |
|----------|------------------------------------------------------------|------------|
| 3.3 | Statistica del quadrupolo | 61 |
| 3.4 | Funzioni di struttura | 64 |
| 3.5 | Statistica degli allineamenti | 68 |
| 3.6 | Statistica del <i>ridge-finding</i> | 69 |
| 4 | Costruzione delle distribuzioni analizzate | 71 |
| 4.1 | Le distribuzioni di confronto | 71 |
| 4.2 | La simulazione N-body di un modello CDM | 79 |
| 5 | Minimal spanning tree (MST) e funzioni di struttura | 81 |
| 5.1 | Risultati per le distribuzioni di confronto | 81 |
| 5.1.1 | Il minimal spanning tree (MST) | 81 |
| 5.1.2 | Le funzioni di struttura | 103 |
| 5.2 | Risultati per la simulazione CDM | 105 |
| 5.2.1 | Il minimal spanning tree (MST) | 105 |
| 5.2.2 | Le funzioni di struttura | 110 |
| 6 | L'analisi di percolazione | 113 |
| 6.1 | Risultati per le distribuzioni di confronto | 113 |
| 6.2 | Risultati per la simulazione CDM | 116 |
| 7 | La statistica del quadrupolo | 119 |
| 7.1 | Risultati per le distribuzioni di confronto | 119 |
| 7.2 | Risultati per la simulazione CDM | 120 |
| | Conclusioni | 123 |
| | Bibliografia | 127 |

Indice delle Tabelle

| | | |
|------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 5.1 | Parametri di <i>separating</i> e <i>pruning</i> utilizzati per studiare l'andamento dei risultati delle funzioni $R(l/ < l >)$ in distribuzioni di tipo \mathbf{R} | 82 |
| 5.2 | Differenza massima fra le funzioni cumulative di $F_{MST}(l/ < l >)$ | 88 |
| 5.3 | Differenza massima fra le funzioni cumulative di $R(l/ < l >)$ | 88 |
| 5.4 | Differenza massima fra le funzioni cumulative di $N(l_T)$ | 88 |
| 5.5 | Differenza massima fra le funzioni cumulative di $N(d/l_T)$ | 92 |
| 5.6 | Lunghezza media \mathcal{L}_{MST} dei segmenti appartenenti all'MST | 95 |
| 5.7 | Differenza massima fra le funzioni cumulative di $R(l/\mathcal{L}_{MST})$ | 100 |
| 5.8 | Differenza massima fra le funzioni cumulative di $N(l_T)$ | 100 |
| 5.9 | Differenza massima fra le funzioni cumulative di $N(d/l_T)$ | 100 |
| 5.10 | Differenza massima fra le funzioni cumulative di $F_{MST}(l/ < l >)$ | 101 |
| 5.11 | Differenza massima fra le funzioni cumulative delle $F_{MST}(l/ < l >)$ delle distribuzioni di confronto e quella della simulazione CDM | 109 |
| 5.12 | Differenza massima fra le funzioni cumulative delle $R(l/\mathcal{L}_{MST})$ delle distribuzioni di confronto e quella della simulazione CDM | 109 |
| 5.13 | Differenza massima fra le funzioni cumulative delle $N(l_T)$ delle distribuzioni di confronto e quella della simulazione CDM | 109 |
| 6.1 | Percentuale di cluster oblati e prolati osservati in ciascun tipo di distribuzione di confronto | 115 |

Indice delle Figure

| | | |
|-----|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 1.1 | Evoluzione temporale delle masse di Jeans e di Silk | 18 |
| 1.2 | Evoluzione delle masse di Jeans e di free streaming per particelle calde | 20 |
| 1.3 | Evoluzione delle masse di Jeans e di free streaming per particelle fredde | 21 |
| 3.1 | Costruzione e riduzione dell'MST | 49 |
| 3.2 | Dimensioni dell'ammasso percolante calcolato con il metodo della percolazione (quadrati) e con l'MST(cerchi) | 61 |
| 4.1 | Esempio di distribuzione di tipo R | 74 |
| 4.2 | Esempio di distribuzione di tipo P | 75 |
| 4.3 | Esempio di distribuzione di tipo F | 76 |
| 4.4 | Esempio di distribuzione di tipo S | 77 |
| 4.5 | Esempio di distribuzione di tipo V | 78 |
| 4.6 | Esempio di sottocampione della simulazione CDM | 80 |
| 5.1 | Andamento delle $R(l/ < l >)$ in funzione dei parametri di <i>pruning</i> e <i>separating</i> adottati in modelli di tipo R | 83 |
| 5.2 | Confronto fra le funzioni $F_{MST}(l/ < l >)$ ricavate per ciascuna delle distribuzioni analizzate | 85 |
| 5.3 | Confronto fra le funzioni $F_{MST}(l/ < l >)/F_{Au}(l/ < l >)$ ricavate per ciascuna delle distribuzioni analizzate | 87 |
| 5.4 | Confronto fra le funzioni $R(l/ < l >)$ ricavate per ciascuna delle distribuzioni analizzate | 89 |
| 5.5 | Confronto fra le funzioni $N(l_T)$ ricavate per ciascuna delle distribuzioni analizzate | 91 |

| | | |
|------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 5.6 | Confronto fra le funzioni $N(d/l_T)$ ricavate per ciascuna delle distribuzioni analizzate | 93 |
| 5.7 | Confronto fra le funzioni $R(l/\mathcal{L}_{MST})$ ricavate per ciascuna delle distribuzioni analizzate | 97 |
| 5.8 | Confronto fra le funzioni $N(l_T)$ ricavate per ciascuna delle distribuzioni analizzate adottando come lunghezza caratteristica di <i>separating</i> \mathcal{L}_{MST} | 98 |
| 5.9 | Confronto fra le funzioni $N(d/l_T)$ ricavate per ciascuna delle distribuzioni analizzate adottando come lunghezza caratteristica di <i>separating</i> \mathcal{L}_{MST} | 99 |
| 5.10 | Curve parametriche di $a(\mu, \nu)$ | 103 |
| 5.11 | Confronto fra la forma dei cluster individuati nelle distribuzioni di tipo R e P | 106 |
| 5.12 | Confronto fra la forma dei cluster individuati nelle distribuzioni di tipo F e S | 107 |
| 5.13 | Confronto fra la forma dei cluster individuati nella distribuzione di tipo V e nella simulazione CDM | 108 |
| 6.1 | Curve di percolazione di ciascun tipo di distribuzione analizzata . . . | 114 |
| 6.2 | Confronto tra la simmetria triassiale dei cluster individuati nelle varie distribuzioni analizzate | 117 |
| 7.1 | Andamento del parametro $\langle S \rangle / \langle S_p \rangle - 1$ in funzione del raggio r . . . | 121 |

Introduzione

Uno dei più importanti problemi ai quali la moderna cosmologia tenta di dare una soluzione è la comprensione dell'origine delle strutture su grande scala osservate nella distribuzione delle galassie. Il miglior metodo per verificare l'efficienza dei modelli proposti per spiegare l'evoluzione di tali strutture è quello di constatare se sulla base di tali modelli siamo in grado di giustificare la forma delle strutture su grande scala osservabili attualmente.

Data la complessità del problema, un approccio semplicemente descrittivo allo studio delle proprietà di clustering dell'universo non è sufficiente. Per approfondire maggiormente la conoscenza di queste proprietà è necessario ricorrere a metodi statistici. Il primo metodo applicato allo studio delle strutture su grande scala dell'universo è stato il semplice conteggio delle sorgenti luminose. Ben presto però si è ricorsi a metodi statistici più efficienti quali le funzioni di correlazione a due punti. Nonostante le funzioni di correlazione siano state un potente mezzo statistico di indagine che ci ha permesso di estendere le nostre conoscenze riguardo le proprietà di clustering dell'universo, esse non mostravano di essere in grado di caratterizzare quantitativamente la forma tridimensionale delle strutture peculiari osservate nei cataloghi di galassie a nostra disposizione.

Negli ultimi anni il miglioramento delle tecniche osservative ci ha messo a disposizione cataloghi di galassie comprendenti un sempre crescente numero di oggetti. Parallelamente i modelli proposti per spiegare la formazione di queste strutture su grande scala si sono fatti via via sempre più raffinati. Ciò ha reso necessario l'impiego di indicatori statistici più sofisticati delle semplici funzioni di correlazione che fossero anche sensibili alla forma intrinseca di tali strutture. Fra i vari metodi statistici che

sono stati proposti e di cui è stata provata la robustezza sono degni di menzione il *minimal spanning tree*, l'analisi di percolazione, la statistica del genus, la funzione di probabilità dei vuoti, l'analisi frattale, le funzioni di struttura, la statistica del quadrupolo e la statistica degli allineamenti.

La nostra tesi di laurea si inserisce in questo filone della ricerca. In essa soffermeremo la nostra attenzione su alcuni dei metodi statistici applicati recentemente allo studio delle strutture su grande scala. Verificheremo se sono in grado di identificare la forma intrinseca delle strutture osservabili all'interno delle distribuzioni di punti studiate. In particolare analizzeremo distribuzioni di punti che riproducono semplicemente le caratteristiche osservate nella distribuzione su grande scala delle galassie nell'universo come piani, filamenti, vuoti ed ammassi più o meno sferici. Cercheremo di stabilire se i cluster individuati in ciascuna delle dette distribuzioni assumono forme caratteristiche strettamente dipendenti dalla forma geometrica delle strutture tipica di ciascun campione di punti analizzato. Inoltre cercheremo di stabilire se i metodi statistici applicati sono in grado di operare una discriminazione fra le varie distribuzioni da noi analizzate. Una volta calibrata la risposta dei vari indicatori statistici esaminati, verificheremo se quest'ultimi sono in grado di rendere conto delle strutture identificabili visivamente in una simulazione di un modello *Cold Dark Matter*. Nonostante questo modello non sia in grado di fornire una fedele riproduzione delle strutture su grande scala evidenziate nei cataloghi di galassie a nostra disposizione, continua comunque ad essere uno dei principali modelli di riferimento utilizzati per studiare le proprietà del clustering dell'universo e anche noi lo useremo per questo scopo. Occorre ricordare che i campioni di confronto analizzati sono solo rappresentazioni molto schematiche e semplificate dei principali tipi di strutture che è possibile osservare nella distribuzione su grande scala delle galassie nell'universo. In questo modo non abbiamo dovuti confrontarci con il problema comune a tutti i cataloghi di galassie attualmente a nostra disposizione, l'incompletezza, dovuta ad effetti di selezione presenti nei cataloghi.

Per realizzare gli obiettivi prefissici con questa tesi abbiamo sviluppato una piccola libreria di programmi statistici, il cui uso potrebbe facilmente essere esteso a studi molto più articolati e complessi del nostro. Il corretto funzionamento di tutti questi

programmi è stato verificato ripetendo esperimenti condotti da precedenti autori e constatando se i risultati da noi ottenuti erano in accordo con quelli riportati in letteratura.

In dettaglio il piano della tesi è il seguente. Nel primo capitolo forniremo un quadro sintetico dello stato attuale delle nostre conoscenze sulla formazione delle strutture su grande scala. In particolare discuteremo le equazioni di Friedmann e i modelli di universo ottenuti dalle soluzioni di tali equazioni. In seguito introdurremo della teoria dell'evoluzione delle perturbazioni formulata da Jeans. In conclusione del capitolo vedremo come è possibile descrivere l'evoluzione delle perturbazioni ben oltre l'intervallo di validità della teoria di Jeans. Nel secondo e nel terzo capitolo faremo una estesa panoramica sui metodi statistici applicati allo studio delle strutture su grande scala. Fra i vari metodi fino ad oggi utilizzati in letteratura introdurremo le funzioni di correlazione, i conteggi in celle, l'analisi frattale, la statistica del genus. Faremo in seguito una più approfondita discussione dei metodi del minimal spanning tree, dell'analisi di percolazione, delle funzioni di struttura, della statistica del quadrupolo e delle statistiche degli allineamenti. Nel quarto capitolo presenteremo il metodo seguito per costruire le distribuzioni da noi analizzate. Nei capitoli quinto, sesto e settimo mostreremo i risultati ottenuti attraverso i metodi statistici da noi applicati. Concluderemo quindi con una breve discussione generale dei risultati conseguiti.

Capitolo 1

Il quadro cosmologico

1.1 Il principio cosmologico

Il formalismo, che tra poco descriveremo, riguardante l'evoluzione delle perturbazioni e la nascita delle galassie, poggia su un importante postulato: *il principio cosmologico*. Esso afferma che su grandi scale con buona approssimazione l'universo è omogeneo ed isotropo, cioè non vi si incontrano posizioni o direzioni privilegiate.

Una giustificazione di tipo filosofico a tale principio fu inizialmente formulata da Milne nel 1935, e successivamente ripresa da Bondi, Hoyle e Gold. Essa si basa sul fatto che risulterebbero inapplicabili le leggi della fisica, oggi note, “qui” ed “ora” qualora risultassero differenti le condizioni fisiche “là” ed “allora”. Seguendo una tale linea di pensiero si giunse alla formulazione del *principio cosmologico perfetto*: l'universo è mediamente omogeneo ed isotropo in ogni direzione ed è sempre uguale a se stesso. A seguito di ciò Hoyle nel 1948 e Hoyle e Narlikar nel 1963 proposero la teoria dello stato stazionario. Molto presto però tale modello fu accantonato in quanto mal si accordava con i risultati delle osservazioni sul fondo cosmico delle microonde, sulla distribuzione delle radiosorgenti e sull'abbondanza dell'elio.

Le migliori giustificazioni del principio cosmologico sono però di natura osservativa. La più importante di tutte è sicuramente l'isotropia del fondo di microonde, che è dell'ordine del 10%. Altre conferme osservative ci vengono dalla validità della legge di Hubble e delle relazioni magnitudine-redshift ($m-z$) e numero-redshift ($N-z$) rela-

tive a classi omogenee di oggetti (galassie, ammassi di galassie, radiosorgenti, quasar, ...), che sono relazioni valide solo nel caso in cui l'universo è omogeneo ed isotropo su grande scala.

1.2 I modelli di Friedmann

Le equazioni fondamentali dalle quali Friedmann partì per ricavare le proprie equazioni cosmologiche sono le equazioni di Einstein. Quest'ultime fissano la relazione esistente tra la metrica dello spazio tempo $g_{ij}(x_k)$ ($i, j, k = 0, 1, 2, 3$) e il tensore energia-momento $T_{ij}(x_k)$ della materia-energia:

$$R_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}R = -\frac{8\pi G}{c^4}T_{ij}, \quad (1.2.1)$$

ove R_{ij} e R sono rispettivamente il tensore e lo scalare di Ricci, G è la costante gravitazionale universale e c è la velocità della luce nel vuoto. In cosmologia il tensore energia-momento più usato è quello che descrive il comportamento di un fluido perfetto,

$$T_{ij} = -pg_{ij} + (p + \rho c^2)U_i U_j, \quad (1.2.2)$$

in cui p è la pressione, ρc^2 è la densità d'energia della massa a riposo e U_k è la quadri-velocità normalizzata in modo tale per cui $U_i U^i = 1$. Si può dimostrare, partendo da semplici considerazioni geometriche e senza ricorrere all'uso di alcuna equazione di campo, che se il principio cosmologico è valido, la metrica dello spazio-tempo è quella di Robertson-Walker. Se nella (1.2.1) sostituiamo la sopra citata metrica, espressa mediante l'equazione

$$ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j = (cdt)^2 - a(t)^2 \left[\frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \right],$$

ove r , θ e φ sono le coordinate polari comoventi, t è il tempo proprio, $a(t)$ è una funzione detta fattore di scala, la costante K è il parametro di curvatura e $i, j = 0, 1, 2, 3$. Facendo assumere a K i valori $-1, 0, 1$, ricaviamo le seguenti relazioni per le componenti tempo-tempo, spazio-tempo e spazio-spazio tempo rispettivamente:

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi}{3}G \left(\rho + 3\frac{p}{c^2} \right) a \quad (1.2.3)$$

$$\dot{a}^2 + Kc^2 = \frac{8\pi}{3}G\rho a^2 \quad (1.2.4)$$

$$a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2Kc^2 = 4\pi G\left(\rho - \frac{p}{c^2}\right)a^2. \quad (1.2.5)$$

Le relazioni (1.2.3) e (1.2.4) prendono il nome di equazioni cosmologiche di Friedmann. Si può verificare che la prima è ricavabile dalla seconda ricordando la relazione

$$d(\rho c^2 a^3) = -p da^3, \quad (1.2.6)$$

la quale descrive il carattere adiabatico dell'espansione dell'universo. In molti casi per i fluidi perfetti l'equazione di stato è esprimibile o approssimabile mediante la relazione

$$p = w\rho c^2, \quad (1.2.7)$$

ove il parametro w è una costante compresa nell'intervallo di Zeldovich $0 \leq w \leq 1$. In seguito faremo sempre riferimento a due particolari valori che la costante può assumere: $w = 0$, che rappresenta il caso di un gas perfetto costituito da un fluido di particelle non relativistiche aventi massa m_p , densità ρ_m e temperatura T , per esempio un fluido di polvere, e $w = 1/3$, che descrive il caso di un fluido di particelle ultrarelativistiche, non degeneri ed in equilibrio termodinamico, ad esempio un gas di fotoni. Dalle relazioni (1.2.7) e (1.2.6), indicando con ρ_{0w} la densità attuale dell'universo, si ricava che

$$\rho a^{3(1+w)} = cost = \rho_{0w} a_0^{3(1+w)} \quad (1.2.8)$$

e in particolare si ha per universi di materia-polvere $w \simeq 0$

$$\rho a^3 \equiv \rho_m a^3 = cost = \rho_{0m} a_0^3$$

e per universi di radiazione $w = 1/3$

$$\rho a^4 \equiv \rho_r a^4 = cost = \rho_{0r} a_0^4.$$

Una proprietà comune a tutti gli universi costituiti da un fluido con $0 \leq w \leq 1$ è quella di possedere un istante di singolarità in corrispondenza del quale il parametro

di espansione si annulla e la densità tende all'infinito. Un tale istante viene indicato con il nome di *big-bang*. Per poter meglio studiare le proprietà dell'universo in prossimità di tale istante introduciamo il parametro di densità nel seguente modo $\Omega_w = \varrho_{0w}/\varrho_{0cr}$, ove ϱ_{0w} e ϱ_{0cr} sono rispettivamente la densità della materia osservata e di quella critica attuale. In altre parole Ω_w indica ci se la materia che riusciamo ad osservare è sufficiente per arrestare, per mezzo della forza gravitazionale, l'espansione dell'universo. Se $\Omega_w < 1$ l'universo si espanderà all'infinito, mentre se $\Omega_w > 1$ ad un certo l'espansione si arresterà e l'universo ricollasserà su se stesso. Per $\Omega_w = 1$ l'universo ha massa sufficiente per rallentare la propria espansione ma non per arrestarla del tutto e richiudersi su se stesso. Riscriviamo, per cui, la (1.2.4), tenendo conto della (1.2.8), nei seguenti modi

$$\left(\frac{\dot{a}}{a_0}\right)^2 = H_0^2 \left[\Omega_w \left(\frac{a_0}{a}\right)^{1+3w} + (1 - \Omega_w) \right] \quad (1.2.9)$$

$$H^2(t) = H_0^2 \left(\frac{a_0}{a}\right)^2 \left[\Omega_w \left(\frac{a_0}{a}\right)^{1+3w} + (1 - \Omega_w) \right], \quad (1.2.10)$$

ove con $H(t) = \dot{a}/a$ viene indicato il valore della costante di Hubble al tempo t generico e con a_0 e H_0 i valori del parametro di espansione e della costante di Hubble all'epoca attuale. Come si può verificare, se per un dato istante t^* si ha che $\dot{a}(t^*) > 0$ e $a(t)$ è una funzione crescente con il tempo, allora si ha che $\dot{a}(t^* - dt) > \dot{a}(t^*) > 0$, dal momento che nelle precedenti equazioni si ha che $(1 + 3w) > 0$. Ripetendo il ragionamento per istanti t^* via via più piccoli, si giunge alla conclusione che \dot{a} è crescente per $t < t^*$. Alla fine si giungerà quindi ad un istante $t = 0$ in cui $a(0) = 0$ e, di conseguenza, la densità e la costante di Hubble divergono. Un tale istante viene chiamato, come già detto, *big-bang*.

Dal momento che i problemi dell'età e della piattezza dell'universo, sollevati dalle teorie sull'evoluzione dell'universo in epoche primordiali, trovano soluzione per modelli di universo per i quali si ha $\Omega \simeq 1$, o supponendo che l'universo abbia attraversato una fase di espansione accelerata (inflazione), ci limiteremo a ricavare le soluzioni della (1.2.9) per un tale valore del parametro di densità. Per universi di Einstein - de Sitter, per i quali $\Omega_w = 1$, la (1.2.9) diventa

$$\left(\frac{\dot{a}}{a_0}\right)^2 = H_0^2 \left(\frac{a_0}{a}\right)^{1+3w},$$

da cui per integrazione si ottiene

$$a(t) = a_0 \left(\frac{t}{t_0} \right)^{2/3(1+w)}$$

ed equivalentemente

$$t = t_0(1+z)^{-3(1+w)/2},$$

che mette in relazione il tempo cosmologico t con il redshift z , ove si è posto $(1+z) = a_0/a$. Dalle precedenti equazioni e dalla (1.2.8) si ricava inoltre che

$$H \equiv \frac{\dot{a}}{a} = \frac{2}{3(1+w)t} = H_0 \frac{t_0}{t} = H_0(1+z)^{3(1+w)/2}$$

$$q \equiv -\frac{a\ddot{a}}{\dot{a}^2} = \frac{1+3w}{2} = cost$$

$$t_{0c,w} \equiv t_0 = \frac{2}{3(1+w)H_0}$$

$$\varrho = \varrho_{0w} \left(\frac{t}{t_0} \right)^{-2} = \frac{1}{6(1+w)^2 \pi G t^2},$$

ove q è il parametro di decelerazione. Sostituendo in queste relazioni i valori sopra indicati per w si ottengono le soluzioni per universi di polvere - materia e radiativi.

1.3 La teoria di Jeans

I modelli sull'origine delle strutture cosmiche sono sostanzialmente basati sulla teoria di Jeans. Mediante essa Jeans riuscì a dimostrare che a partire da un fluido omogeneo, isotropo e in condizioni stazionarie piccole perturbazioni della densità $\delta\rho$ e della velocità δv possono evolvere nel tempo, ed in particolare le fluttuazioni di densità possono crescere qualora l'effetto della pressione sia trascurabile rispetto a quello dell'autogravitazione. Si dice che perturbazioni che mostrano un tale comportamento presentano il fenomeno dell'*instabilità gravitazionale di Jeans*.

Le equazioni mediante le quali si descrive il comportamento dinamico di un fluido autogravitante sono quelle di continuità, di Eulero e di Poisson:

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \varrho \vec{v} = 0 \tag{1.3.1}$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} + \frac{1}{\varrho} \vec{\nabla} p + \vec{\nabla} \varphi = 0 \quad (1.3.2)$$

$$\nabla^2 \varphi - 4\pi G \varrho = 0. \quad (1.3.3)$$

Se si trascurano gli effetti dissipativi dovuti alla viscosità e alla termoconduzione del fluido alle precedenti equazioni ne va aggiunta una quarta che esprime la conservazione dell'entropia per unità di massa s :

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} s = 0. \quad (1.3.4)$$

Jeans originariamente cercò di trovare una soluzione del precedente sistema di equazioni del tipo : $\varrho = \varrho_0 + \delta\varrho$, $\vec{v} = \delta\vec{v}$, $p = p_0 + \delta p$, $s = s_0 + \delta s$, $\varphi = \varphi_0 + \delta\varphi$ ove le $\delta\varrho$, δv , δs e $\delta\varphi$ rappresentano una piccola perturbazione della soluzione statica $\varrho = \varrho_0$, $\vec{v} = 0$, $s = s_0$, $p = p_0$, $\vec{\nabla} \varphi = 0$. Prima di procedere va notato che l'equazione $\vec{\nabla} \varphi = 0$ è in contrasto con l'equazione di Poisson. Infatti se supponiamo che $\varrho \neq 0$ risulta dalla (1.3.3) che φ varia nello spazio contrariamente all'ipotesi di omogeneità. In altre parole una distribuzione omogenea di ϱ non è stazionaria, ma deve descrivere una generale espansione o un collasso isotropo. Il detto sistema assume dunque la forma, trascurando i termini di ordine superiore al primo,

$$\frac{\partial \delta \vec{v}}{\partial t} + \varrho_0 \vec{\nabla} \cdot \delta \vec{v} = 0 \quad (1.3.5a)$$

$$\frac{\partial \delta \varrho}{\partial t} + \frac{1}{\varrho_0} \left(\frac{\partial p}{\partial \varrho} \right)_s \vec{\nabla} \delta \varrho + \frac{1}{\varrho_0} \left(\frac{\partial p}{\partial s} \right)_\varrho \vec{\nabla} \delta s + \vec{\nabla} \delta \varphi = 0 \quad (1.3.5b)$$

$$\nabla^2 \delta \varphi - 4\pi G \delta \varrho = 0 \quad (1.3.5c)$$

$$\frac{\partial \delta s}{\partial t} = 0. \quad (1.3.5d)$$

Soluzioni a tale sistema possono essere espresse mediante la seguente relazione

$$\delta u_i = \delta_i \exp(i\vec{k} \cdot \vec{r}),$$

che rappresenta soluzioni del tipo onde piane e ove le δu_i sono pari a $\delta\varrho$, $\delta\vec{v}$, $\delta\varphi$ e δs per $i = 1, 2, 3, 4$ rispettivamente e le δ_i sono funzioni del tempo. Poichè la soluzione imperturbata non dipende dal tempo, ci si può limitare a considerare soluzioni del tipo

$$\delta_i(t) = \delta_{0i} \exp(i\omega t).$$

Indicando con D, \vec{V}, Φ, Σ le ampiezze δ_{0i} e ponendo $v_s^2 = (\partial p / \partial \rho)_s$, con v_s velocità del suono e $\delta_0 = D / \rho_0$, il sistema di equazioni (1.3.5) diventa

$$w\delta_0 + \vec{k} \cdot \vec{V} = 0 \quad (1.3.6a)$$

$$w\vec{V} + \vec{k}v_s^2\delta_0 + \frac{\vec{k}}{\rho_0} + \left(\frac{\partial p}{\partial s}\right)_e \Sigma + \vec{k}\Phi = 0 \quad (1.3.6b)$$

$$k^2\Phi + 4\pi G\rho_0\delta_0 = 0 \quad (1.3.6c)$$

$$w\Sigma = 0. \quad (1.3.6d)$$

Le soluzioni di tale sistema sono cinque. Analizziamo per prime quelle non dipendenti dal tempo, cioè quelle con $w = 0$. Una di queste corrisponde a $\Sigma = \text{cost} \neq 0$ ed è detta soluzione entropica. Essa ci indica che in mancanza di viscosità e termocoduzione le perturbazioni relative ad s si conservano nel tempo. Le rimanenti due soluzioni con $w = 0$ si ottengono ponendo $\Sigma = 0$ e $\vec{k} \cdot \vec{V} = 0$. Esse rappresentano moti vorticosi che non comportano alcuna perturbazione nella densità. Descriviamo ora le soluzioni dipendenti dal tempo, cioè quelle per le quali $w \neq 0$. In questo caso, dall'ultima equazione del sistema (1.3.6) risulta che $\Sigma = 0$. Le due soluzioni così ottenute sono dette adiabatiche. Dalla prima equazione del sistema (1.3.6) si ricava che $\vec{k} \cdot \vec{V} \neq 0$. Poichè abbiamo già precedentemente preso in considerazione il caso in cui sono fra loro perpendicolari, possiamo assumere che \vec{k} sia parallelo a \vec{V} . In tale ipotesi il sistema (1.3.6) diventa

$$w\delta_0 + kV = 0 \quad (1.3.7a)$$

$$wV + kv_s^2\delta_0 + k\Phi = 0 \quad (1.3.7b)$$

$$k^2\Phi + 4\pi G\rho_0\delta_0 = 0, \quad (1.3.7c)$$

che ammette soluzioni non nulle solo quando il determinante di tale sistema è uguale a zero. Si ottengono a questo punto due tipi di soluzioni a seconda che la lunghezza d'onda delle perturbazioni $\lambda \equiv 2\pi/k$ sia inferiore o superiore alla lunghezza d'onda di Jeans

$$\lambda_J \equiv v_s \left(\frac{\pi}{G\rho_0} \right)^{1/2}. \quad (1.3.8)$$

Nel caso in cui $\lambda < \lambda_J$, w è reale e assume il valore

$$w = \pm v_s k \left[1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_J} \right)^2 \right]^{1/2}$$

e il sistema (1.3.7) ha per soluzione

$$\frac{\delta \varrho}{\varrho_0} = \delta_0 \exp[i(\vec{k} \cdot \vec{r} \pm |w|t)] \quad (1.3.9a)$$

$$\delta \vec{v} = \mp \frac{\vec{k}}{k} v_s \delta_0 \left[1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_J} \right)^2 \right]^{1/2} \exp[i(\vec{k} \cdot \vec{r} \pm |w|t)] \quad (1.3.9b)$$

$$\delta \varphi = -\delta_0 v_s^2 \left(\frac{\lambda}{\lambda_J} \right)^2 \exp[i(\vec{k} \cdot \vec{r} \pm |w|t)]. \quad (1.3.9c)$$

Tali relazioni rappresentano due onde sonore propagantesi nelle due direzioni $\pm \vec{k}$.

Per $\lambda > \lambda_J$ si ha invece che w è immaginario

$$w = \pm i(4\pi G \varrho_0)^{1/2} \left[1 - \left(\frac{\lambda_J}{\lambda} \right)^2 \right]^{1/2}.$$

In tal caso il sistema (1.3.7) ha come soluzioni

$$\frac{\delta \varrho}{\varrho_0} = \delta_0 \exp i(\vec{k} \cdot \vec{r} \exp(\pm |w|t)) \quad (1.3.10a)$$

$$\delta \vec{v} = \mp \frac{\vec{k}}{k} v_s \delta_0 \left[1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_J} \right)^2 \right]^{1/2} \exp i(\vec{k} \cdot \vec{r}) \exp(\pm |w|t) \quad (1.3.10b)$$

$$\delta \varphi = -\delta_0 v_s^2 \left(\frac{\lambda}{\lambda_J} \right)^2 \exp i(\vec{k} \cdot \vec{r}) \exp(\pm |w|t), \quad (1.3.10c)$$

che descrivono onde stazionarie di ampiezza variabile con tempo caratteristico

$$\tau \equiv |w|^{-1} = (4\pi G \varrho_0)^{-1/2} \left[1 - \left(\frac{\lambda_J}{\lambda} \right)^2 \right]^{-1/2}.$$

Si può risalire al significato fisico della λ_J facendo le seguenti ipotesi qualitative. Ad un dato istante temporale t supponiamo di avere una perturbazione $\delta \varrho > 0$ nella densità di un fluido in una data regione, che per semplicità considereremo sferica e di raggio λ . Una tale perturbazione è in grado di crescere nel tempo quando, dette F_g e F_p le forze per unità di massa dovute all'autogravitazione e alla pressione, si ha

$$F_g \simeq \frac{G \varrho \lambda^3}{\lambda^2} > F_p \simeq \frac{p \lambda^2}{\varrho \lambda^3} \simeq \frac{v_s^2}{\lambda},$$

dalla quale si ricava la condizione $\lambda > v_s(G\rho)^{-1/2} \simeq \lambda_J$. Ad un analogo risultato si perviene ragionando in termini di energia. Definite con U e E_t l'energia gravitazionale e l'energia cinetica dovuta ai moti termici, rispettivamente, per unità di massa, si ha che

$$U \simeq \frac{G\rho\lambda^3}{\lambda} > E_t \simeq v_s^2$$

o in altri termini deve risultare che il tempo di caduta libera τ_{ff} sia inferiore al tempo idrodinamico τ_h

$$\tau_{ff} \simeq \frac{1}{(G\rho)^{1/2}} < \tau_h \simeq \frac{\lambda}{v_s}$$

altrimenti la perturbazione non ha il tempo di evolvere.

1.4 Instabilità di Jeans nei modelli di Friedmann

Analizziamo ora a quali risultati porta l'applicazione della teoria di Jeans ai modelli di universo di Friedmann di cui si è accennato nel paragrafo (1.1). A tal fine vanno trovate le soluzioni del sistema di equazioni (1.3.6) del tipo

$$\delta u_i = \delta_i \exp(i\vec{k} \cdot \vec{r}), \quad (1.4.1)$$

ove i δ_i sono coefficienti dipendenti dal tempo. Per semplicità calcoliamo tali soluzioni nel caso ci si possa limitare ad una trattazione newtoniana del problema. Posti i δ_i per $i = 1, 2, 3, 4$ uguali a D^* , \vec{V}^* , Φ^* e Σ^* e ricordando che il vettore d'onda è uguale ad una lunghezza d'onda che varia a causa dell'espansione dell'universo con legge

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi a_0}{\lambda_0 a} = k_0 \frac{a_0}{a}$$

cosicchè l'esponenziale che compare nell'espressione (1.4.1) delle soluzioni non dipende dal tempo, il sistema (1.3.6) assume la seguente forma

$$\dot{D}^* + 3\frac{\dot{a}}{a}D^* + i\vec{v} \cdot \vec{k}D^* + i\rho\vec{k} \cdot \vec{V}^* = 0 \quad (1.4.2a)$$

$$\dot{\vec{V}}^* + \frac{\dot{a}}{a}\vec{V}^* + i\vec{v} \cdot \vec{k}\vec{V}^* + iv_s^2\vec{k}\frac{D^*}{\rho} + i\frac{\vec{k}}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial S} \right)_\rho \Sigma^* + i\vec{k}\Phi^* = 0 \quad (1.4.2b)$$

$$k^2\Phi^* + 4\pi GD^* = 0 \quad (1.4.2c)$$

$$\dot{\Sigma}^* + i\vec{v} \cdot \vec{k}\Sigma^* = 0. \quad (1.4.2d)$$

Poichè come per nel paragrafo precedente le soluzioni che ci interessano di più sono quelle per le quali $\Sigma = 0$ e \vec{V} è parallelo a \vec{k} , cioè quelle adiabatiche, il sistema (1.4.2) si riduce a

$$\dot{D}^* + 3\frac{\dot{a}}{a}D^* + i\rho kV^* = 0 \quad (1.4.3)$$

$$\dot{V}^* + \frac{\dot{a}}{a}V^* + ik\left(v_s^2 - \frac{4\pi G\rho}{k^2}\right)\frac{D^*}{\rho} = 0. \quad (1.4.4)$$

Se si pone nella (1.4.3) $D^* = \rho\delta$ si ottiene

$$\dot{\delta} + ikV^* = 0$$

e da questa per derivazione

$$\ddot{\delta} + ik\left(\dot{V}^* - \frac{\dot{a}}{a}\right) = 0.$$

Sostituendo nella (1.4.4) le relazioni appena trovate si trova

$$\ddot{\delta} + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{\delta} + (v_s^2 k^2 - 4\pi G\rho)\delta = 0. \quad (1.4.5)$$

Procedendo in maniera analoga si ottiene per un modello di universo costituito da un fluido perfetto con equazione di stato $p = w\rho c^2$ con $w = cost$ e $v_s \neq 0$ una relazione analoga alla precedente

$$\ddot{\delta} + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{\delta} + \{v_s^2 k^2 - 4\pi(1+w)\left[1 + 3\left(\frac{v_s}{c}\right)^2\right]G\rho\}\delta = 0. \quad (1.4.6)$$

Sostituendo in tale equazione le relazioni trovate per gli universi di Einstein - de Sitter

$$\rho = \frac{1}{6\pi(1+w)^2 G t^2}$$

$$a \propto t^{2/3(1+w)}$$

$$\frac{\dot{a}}{a} = \frac{2}{3(1+w)t}$$

e ponendo $\delta \propto t^n$ e

$$\lambda_J = \frac{\sqrt{24}}{5 + 9w} v_s \left(\frac{\pi}{G\rho}\right)^{1/2},$$

si ottiene per la (1.4.6) la seguente soluzione

$$\frac{\delta \varrho}{\varrho} \propto t^{-\{1-3w \pm (5+9w)[1-(\lambda_j/\lambda)^2]^{1/2}\}/6(1+w)} \exp(i\vec{k} \cdot \vec{r}) \quad . \quad (1.4.7)$$

Nell'ipotesi che sia $\lambda > \lambda_J$ le soluzioni presentano il fenomeno dell'instabilità gravitazionale e per $\lambda \gg \lambda_J$ si riducono alle

$$\left(\frac{\delta \varrho}{\varrho}\right)_+ \propto t^{2(1+3w)/3(1+w)}, \quad \left(\frac{\delta \varrho}{\varrho}\right)_- \propto t^{-1} \quad .$$

Si noti che la soluzione decrescente è indipendente dal valore di w . Al contrario l'esponente della soluzione crescente è funzione di w : tale proprietà è dovuta al fatto che, maggiore è il valore di w , minore è la velocità di espansione dell'universo. Su scale per le quali è verificata la condizione $\lambda < \lambda_J$ le soluzioni sono date dalla relazione

$$\frac{\delta \varrho}{\varrho} \propto t^{-(1-3w)/6(1+w)} \exp i \left\{ \vec{k} \cdot \vec{r} \pm \frac{5+9w}{6(1+w)} \left[\left(\frac{\lambda_J}{\lambda}\right)^2 - 1 \right]^{1/2} \ln t \right\}$$

che rappresenta soluzioni oscillanti. Per $\lambda \ll \lambda_J$ essa si riduce alla forma

$$\frac{\delta \varrho}{\varrho} \propto t^{-(1-3w)/6(1+w)} \exp[i(\vec{k} \cdot \vec{r} \pm kv_s t \ln t)].$$

Per ottenere l'espressione per i casi particolari in cui nell'equazione di stato $w = cost$ basta porre $v_s = w^{1/2}c$ per $w > 0$ mentre per universi dominati dalla materia il valore di v_s dovrà essere espresso in modo opportuno. Per un universo di polvere o di un fluido non collisionale ($w = 0$) il termine v_s^2 deve essere sostituito da un altro dello stesso ordine di grandezza per velocità quadratica media delle particelle.

1.5 L'evoluzione delle perturbazioni

Come già detto nei precedenti paragrafi le soluzioni di interesse cosmologico del sistema (1.3.5) sono essenzialmente di due tipi: quelle adiabatiche e quelle entropiche o isoterme. Le perturbazioni adiabatiche agiscono sia sulla componente materiale che radiativa mentre quelle isoterme sulla sola componente materiale. Dopo l'epoca della ricombinazione, a seguito del disaccoppiamento fra le due componenti, entrambi i tipi di perturbazione evolvono allo stesso modo.

Daremo di seguito una breve descrizione di come evolvono nel tempo quest'ultime relativamente a modelli di universo dominati da materia barionica e materia non barionica.

Consideriamo innanzitutto il caso di un universo dominato da un fluido composto da materia barionica e radiazione. Definiamo le seguenti quantità: massa di Jeans e massa dissipata o di Silk. Per massa di Jeans si indica la massa contenuta in una sfera di raggio $\lambda_J/2$:

$$M_J = \frac{\pi}{6} \varrho_m \lambda_J^3,$$

ove λ_J è data dalla (1.4.7). Per una perturbazione adiabatica la massa di Jeans, in epoche antecedenti l'equivalenza, di seguito indicata con z_{eq} , è esprimibile mediante la seguente relazione:

$$M_J^{(a)} = \frac{\pi}{6} \varrho_m \left[\frac{c}{\sqrt{3}} \left(\frac{\pi}{G\varrho} \right)^{1/2} \right]^3 \simeq M_{J,eq}^{(a)} \left(\frac{1+z}{1+z_{eq}} \right)^{-3},$$

ove $M_{J,eq}^{(a)} \simeq 3.5 \times 10^{15} (\Omega h^2)^{-2} M_\odot$, mentre per epoche comprese tra l'equivalenza e la ricombinazione, z_{rec} , si ha $M_J^{(a)} \simeq cost \simeq M_{J,eq}^{(a)}$. Per una perturbazione isoterma, nell'intervallo $z_{eq} \div z_{rec}$ si ha invece:

$$M_J^{(i)} \simeq \frac{\pi}{6} \varrho_m \left(\frac{\pi k_B T_m}{G m_p \varrho_m} \right) \simeq cost \simeq M_{J,rec}^{(i)} \simeq 5 \times 10^4 (\Omega h^2)^{-1/2} M_\odot,$$

ove $\varrho = \varrho_m + \varrho_r$ è la densità totale del fluido, essendo ϱ_m e ϱ_r le densità delle componenti materiale e radiativa rispettivamente, k_B è la costante di Boltzmann, T_m è la temperatura della materia e m_p è la massa del protone. Le relazioni esprimenti M_J per i due tipi di perturbazioni sono differenti poichè, come già accennato, prima della ricombinazione le perturbazioni adiabatiche interessano sia la componente materiale che quella radiativa, mentre quelle isotermiche solo quella materiale. Di conseguenza la velocità del suono, che compare nella (1.4.7), per le fluttuazioni adiabatiche è quella di un plasma con densità $\varrho = \varrho_m + \varrho_r$ e pressione $p = p_m + p_r \simeq p_r \simeq \varrho_r c^2/3$, mentre per le fluttuazioni isoterme è quella relativa ad un gas di particelle monoatomiche di massa m_p e temperatura T_m .

Analogamente alla massa di Jeans può essere definita la massa di Silk per perturbazioni adiabatiche:

$$M_D^{(a)} = \frac{\pi}{6} \varrho_m \lambda_D^{(a)3},$$

ove $\lambda_D^{(a)} \simeq 2.3c(\tau_{\gamma e}t)^{1/2}$ prima dell'equivalenza e $\lambda_D^{(a)} \simeq 2.5c(\tau_{\gamma e}t)^{1/2}$ in un periodo compreso tra l'equivalenza e la ricombinazione, qualora l'universo fosse sufficientemente denso per soddisfare la relazione $z_{eq} > z_{rec}$ e $\tau_{\gamma e}$ rappresenta il tempo caratteristico di collisione fotone-elettrone. Per chiarire l'importanza che tale quantità riveste nello studio dell'evoluzione delle perturbazioni è necessario aprire una breve parentesi. Come ben noto nel periodo di plasma, a causa delle forti interazioni tra materia e radiazione, sull'evoluzione delle perturbazioni adiabatiche agiscono processi dissipativi attribuibili alla viscosità e alla termoconduzione. Partendo da semplici considerazioni si può risalire al tempo caratteristico di dissipazione $\tau_{dis}(\lambda)$ di una perturbazione a causa dei sopra citati meccanismi. Se il tempo t necessario ad una fluttuazione per evolvere è inferiore a $\tau_{dis}(\lambda)$ essa risulterà dissipata, altrimenti è in grado di crescere. Poichè la condizione $\tau_{dis}(\lambda) < t$ coincide con quella $\lambda < \lambda_D$ a seguito della relazione

$$\tau_{dis}(\lambda) = \left(\frac{\lambda}{\lambda_D} \right)^2 t,$$

ove λ_D è detta scala di dissipazione, se ne deduce che tutte le perturbazioni con scale $\lambda < \lambda_D$ o masse $M < M_D$ vengono dissipate a causa della viscosità e della termoconduzione.

Nella figura (1.1) sono riportati gli andamenti delle due quantità sopra definite nel caso in cui l'epoca dell'equivalenza preceda quella della ricombinazione.

Analizziamo per primo il comportamento delle perturbazioni adiabatiche: le perturbazioni che coinvolgono masse dell'ordine di $M > M_{J,eq}^{(a)}$, ove $M_{J,eq}^{(a)}$ è la massa di Jeans per perturbazioni adiabatiche all'epoca dell'equivalenza, avendo per ogni epoca antecedente e successiva lunghezza d'onda sempre maggiore della lunghezza d'onda di Jeans riescono a crescere indefinitamente. La legge di crescita per tali perturbazioni prima dell'equivalenza è definita da

$$\delta_m \simeq \frac{3}{4} \delta_r \propto t \propto (1+z)^{-2} \quad (1.5.1)$$

e nel periodo compreso tra l'equivalenza e la ricombinazione, ammesso che esista, da

$$\delta_m \simeq \frac{3}{4} \delta_r \propto t^{2/3} \propto (1+z)^{-1}. \quad (1.5.2)$$

Dopo l'epoca del disaccoppiamento le perturbazioni nella materia continuano ad

Figura 1.1: Evoluzione temporale delle masse di Jeans e di Silk

evolvere con andamento ancora ben descritto dalla (1.5.2) sia nel caso in cui per il modello di universo considerato si abbia $\Omega = 1$ sia che si abbia $w < 1$, purchè sia $\Omega z \gg 1$.

Perturbazioni per le quali la massa sia compresa tra $M_{J,eq}^{(a)} \gtrsim M \gtrsim M_{D,rec}^{(a)}$ (il valore di quest'ultima massa è di circa $10^2(\Omega h^2)^{-5/4} M_\odot$) in epoche precedenti alla loro entrata nell'orizzonte dei barioni evolvono con legge data dalla (1.5.1), in epoche intermedie all'intervallo $z_{H,M}$ e z_{rec} , epoca della ricombinazione, oscillano come onde acustiche e dopo l'epoca del disaccoppiamento evolvono come quelle per le quali si ha $M \gtrsim M_{J,eq}^{(a)}$. Si definisce *entrata nell'orizzonte* di una perturbazione di massa M l'istante caratterizzato da un redshift $z_{H,M}$, tale che

$$M_{Hb}(z_{H,M}) = \frac{\pi}{6} \rho_m r_H^3 = M,$$

ove r_H è il raggio dell'orizzonte cosmologico. Nel caso in cui le perturbazioni abbiano massa $M < M_{D,rec}^{(a)}$ evolvono come le precedenti fino al momento in cui $M = M_D^{(a)}$, dopo di che vengono dissipate.

Le perturbazioni isoterme con massa $M \gtrsim M_{J,rec}^{(i)}$ rimangono congelate fino all'epoca $z_i = \min(z_{eq}, z_{rec})$ dopo di che anch'esse diventano instabili ed evolvono con legge analoga a quella delle perturbazioni adiabatiche.

Analizziamo ora il caso di universi dominati da materia oscura non barionica. Le particelle non collisionali, a cui di seguito faremo riferimento indicandole con il simbolo X , sono anche dette *relicti cosmici* e vengono suddivisi nei seguenti due tipi:

- a) *relicti cosmici termici*; a tale genere appartengono tutte le particelle che in epoche antecedenti al loro disaccoppiamento erano in equilibrio termodinamico con il resto delle componenti dell'universo. Vengono ulteriormente suddivisi in: *relicti cosmici caldi*, cioè particelle ancora relativistiche all'epoca del loro disaccoppiamento, e i *relicti cosmici freddi*, quelle non più relativistiche a tale epoca. Un tipico esempio di relicti cosmici termici sono i neutrini dotati di massa, $m_\nu \simeq 30eV$;
- b) *relicti cosmici non termici*; sono quelle particelle non hanno mai partecipato all'equilibrio termodinamico delle altre componenti dell'universo. Rappresentativi di tale categoria di particelle sono i monopoli e, se esistono, gli assioni e le stringhe cosmiche.

Analogamente a come è stato fatto per le perturbazioni adiabatiche e isoterme, anche in questo caso possiamo definire la massa di Jeans e la massa di *free streaming* per particelle non collisionali. Si definisce massa di free streaming la quantità espressa dalla relazione

$$M_{fs} = \frac{\pi}{6} m_X n_X \lambda_{fs}^3$$

ove λ_{fs} è detta scala di free streaming e m_X e n_X sono rispettivamente la massa e la densità numerica delle particelle non collisionali. Questa quantità è fondamentale per lo studio dell'evoluzione delle perturbazioni nella componente non collisionale dell'universo, in quanto per le perturbazioni per le quali si ha $\lambda > \lambda_J$ le forze gravitazionali hanno il sopravvento sulle forze che tendono a contrastare la crescita delle stesse, mentre per $\lambda < \lambda_J$ l'effetto dispersivo di free streaming è dominante. Per cui

tutte le perturbazioni coinvolgenti masse $M \lesssim M_{fs,X}$ vengono rapidamente dissipate a causa di un tale effetto.

Le figure (1.2) e (1.3) mostrano l'andamento temporale delle due quantità appena citate per i relitti cosmici caldi (ν neutrini massivi, $X \neq \nu$ altre particelle calde) e freddi, con t_{der} si intende l'epoca della transizione dalla fase relativistica a quella non relativistica.

Figura 1.2: Evoluzione delle masse di Jeans e di free streaming per particelle calde

Per i relitti cosmici non termici una tale analisi è superflua in quanto non essendo essi mai stati in equilibrio con le altre componenti dell'universo ed avendo velocità sempre trascurabili rispetto a ciascuna di esse, i valori massimi raggiungibili dalle masse di Jeans e di free streaming sono molto bassi. Di conseguenza le perturbazioni su tutte le scale di interesse cosmologico crescono ininterrottamente e riescono a generare protostrutture cosmiche solo su scale dell'ordine di $M \gtrsim M_{J,rec}^{(i)}$, dove peraltro sono già attive fluttuazioni nella componente barionica.

1.6 Cenni sull'origine delle galassie

Come abbiamo già visto nel precedente paragrafo, le perturbazioni adiabatiche che sopravvivono sino alla ricombinazione sono quelle coinvolgenti masse $M > M_{D,rec}^{(a)} \approx 10^{12} \div 10^{14} M_{\odot}$. Ammettendo che l'ampiezza delle perturbazioni cali al crescere della loro massa, si può verificare che le prime perturbazioni a entrare nella fase di evoluzione non lineare sono quelle con masse dell'ordine di $10^{14} \div 10^{15} M_{\odot}$. Da tali perturbazioni si formeranno strutture di forma appiattita, i pancake, dalle quali si origineranno i protoammassi di galassie. Dalla successiva frammentazione di questi si formeranno le singole galassie (scenario top-down).

Nel caso delle fluttuazioni isoterme, le prime perturbazioni a diventare instabili alla ricombinazione sono quelle con masse dell'ordine di $M > M_{J,rec}^{(i)} \approx 10^5 \div 10^6 M_{\odot}$, corrispondenti all'incirca alla massa di un ammasso globulare. Supponendo che anche in questo caso l'ampiezza delle perturbazioni cali al crescere della massa coinvolta, si deduce che le protostrutture che entreranno per prime nella fase non lineare sono quelle con masse dell'ordine di $M_{J,rec}^{(i)}$. Grazie a fenomeni di instabilità gravitazionale su scale via via sempre maggiori si verranno a formare strutture con massa sempre più grande fino alla formazione degli ammassi di galassie (scenario bottom-up).

Figura 1.3: Evoluzione delle masse di Jeans e di free streaming per particelle fredde

In fine vediamo come avrebbero origine le galassie in scenari dominati da materia

oscura non collisionale. In tal caso si fanno le seguenti tre distinzioni a seconda del tipo di particelle considerate:

- a) scenari con particelle di tipo caldo, corrispondenti ai relitti cosmici caldi (Hot Dark Matter: HDM); in questo scenario la genesi dell'origine delle galassie segue grosso modo le linee già tracciate nel caso degli scenari top-down;
- b) scenari con particelle di tipo freddo, corrispondenti ai relitti cosmici freddi (Cold Dark Matter: CDM); in questo caso gli scenari sono simili a quelli bottom-up;
- c) scenari ibridi, corrispondenti ad una miscela di particelle calde e fredde (CHDM o MDM: Mixed Dark Matter); la più diffusa versione di tale scenario è quella in cui le componenti dell'universo sono la CDM e neutrini leggeri con massa di circa 10 eV. Per la prima il parametro di densità assume di solito il valore di $\Omega_X \simeq 0.7$, per la seconda quello di $\Omega_X \simeq 0.3$. Sebbene un tale scenario sembra in grado di render conto delle strutture su grande scala osservate, ciò non avviene per quelle su piccola scala.

1.7 L'approccio N-body alla fase non lineare

Una fluttuazione δ evolve nelle modalità previste dalla teoria sviluppata nei paragrafi precedenti sinchè risulta $0 < |\delta| \ll 1$. Quando $|\delta| \simeq 1$ la teoria di Jeans non è più applicabile e si deve adottare un diverso approccio per poter procedere nella nostra indagine sulla genesi delle perturbazioni.

L'approssimazione di Zeldovich e il modello dell'adesione sono due dei più importanti metodi, storicamente usati, che ci hanno permesso di estendere la nostra conoscenza su come evolvono le perturbazioni ben oltre la fase lineare. Mediante l'approssimazione di Zeldovich ci si può ricavare una soluzione del sistema di equazioni (1.3.5) per il modo crescente delle perturbazioni in termini del moto delle particelle a partire da posizioni iniziali imperturbate distribuite uniformemente. Tale approccio è una buona approssimazione quando si studiano perturbazioni unidimensionali ed è anche stato confermato dalle simulazioni numeriche. Esso però non è più adeguato quando si ha lo *shell crossing*. In corrispondenza di tale di tale evento le traiettorie di più particelle convergono verso un medesimo punto consentendo la formazione

di strutture quali i pancake. Contrariamente a quanto è lecito aspettarsi, la struttura che si è così formata invece di permanere tende a svanire rapidamente. Per correggere un tale difetto dell'approssimazione di Zeldovich è stato proposto il modello dell'adesione. Esso consiste nell'introdurre nell'equazioni del sistema (1.3.5) un termine di viscosità che simuli l'azione della gravità costringendo così le particelle ad "aderire" l'una all'altra. Tuttavia la complessità dei processi che regolano la formazione delle strutture cosmiche durante la fase non lineare ci impedisce il loro studio dettagliato mediante metodi analitici. Pertanto per tale analisi si fa sempre più ricorso a simulazioni numeriche.

È possibile rappresentare l'intero universo in espansione, o un suo sottoinsieme, mediante una "scatola", generalmente un cubo, contenente un notevole numero di punti, dotati di massa m , in mutua interazione gravitazionale. Le dimensioni di tale cubo devono essere sufficientemente grandi in modo da rappresentare un buon campione dell'universo. Su tale cubo, inoltre, vengono assunte condizioni periodiche al contorno in tutte le direzioni. Sebbene esistano numerose tecniche numeriche di simulazione, esse differiscono essenzialmente l'una dall'altra per il modo con cui le forze agenti sulle singole particelle vengono calcolate. Daremo di seguito una breve descrizione delle tecniche più diffusamente impiegate.

Metodo PP (Particle-Particle).

Il più semplice metodo per calcolare l'evoluzione non-lineare di un fluido cosmologico consiste nel rappresentare quest'ultimo come un insieme discreto di particelle materiali e calcolare la somma su tutte le coppie di particelle delle forze:

$$\vec{F}_{ij} = \frac{Gm^2(x_j - x_i)}{(\epsilon^2 + |x_i - x_j|)^{3/2}}, \quad (1.7.1)$$

ove x_i e x_j indicano la posizione dei due punti materiali aventi la medesima massa m e ϵ è convenzionalmente chiamata *softening length*, la cui unica funzione è quella di sopprimere le forze su piccola scala ed evita che F_{ij} diverga all'infinito. Una volta trovato il risultato si ripete il calcolo in corrispondenza di un successivo istante temporale distanziato rispetto al precedente di un dato intervallo, in genere piccolo.

Il principale limite da cui è afflitta tale tecnica di simulazione deriva dal fatto che per ottenere un campione realistico di universo su grande scala è necessario disporre

di un elevato numero di punti, per cui il tempo necessario al computer per completare i calcoli diviene enorme. Infatti supponendo che la nostra simulazione coinvolga N particelle, il numero di operazioni necessario per ottenere la somma delle forze è $N - 1$ e quello indispensabile per calcolare l'accelerazione di ciascuna particella è $N(N - 1)/2$, per ogni istante considerato. Per cui, pur essendo una tecnica molto accurata, il suo impiego è limitato a simulazioni con non più di 10^4 particelle, che è un numero troppo esiguo per poter essere una realistica simulazione di strutture su grande scala.

Metodo PM (Particle-Mesh).

Il metodo con cui si cerca di risalire al valore della forza agente su ciascuna particella della simulazione, consiste nel distribuire punti massa su una griglia a passo costante e risolvere per essi l'equazione di Poisson.

Indichiamo con \vec{n} un vettore che fissa la posizione di un punto sulla griglia, con M il numero di celle in cui è diviso ciascun lato della nostra "scatola" e definiamo il vettore $\vec{q} = \vec{n}/M$, ove M è il numero di maglie della griglia per lato del cubo di simulazione. Per semplicità, inoltre, imponiamo che la lunghezza del lato della nostra scatola sia unitario e che il valore della costante gravitazionale G sia uno. Attraverso semplici passaggi troviamo che la forza agente su ciascuna particella della simulazione è esprimibile mediante la relazione:

$$\vec{F}(x_i) = \sum_{\vec{q}} W(x_i - \vec{q}) \vec{F}(\vec{q}), \quad (1.7.2)$$

ove W è la funzione di distribuzione della massa dei punti sulla griglia.

Il tempo necessario al calcolo della forza attraverso la (1.7.2) si riduce notevolmente se viene eseguito nello spazio di Fourier. In tal caso diviene indispensabile imporre delle condizioni periodiche al bordo del volume della simulazione.

Metodo P³M (Particle-Particle-Particle-Mesh).

L'intrinseca debolezza della precedente tecnica è la scarsa accuratezza con la quale calcola le forze dovute a interazioni su piccola scala dovuto alla presenza della griglia. Possiamo aggirare un tale difetto, e nel contempo contenere entro limiti accettabili il

tempo di calcolo, decomponendo la forza in due termini:

$$\vec{F}_p = \vec{F}_p^{sr} + \vec{F}_p^G, \quad (1.7.3)$$

il primo dei quali rappresenta il contributo alla forza totale dovuto a interazioni fra particelle poste a breve distanza l'una dall'altra, che può essere calcolato con il metodo PP, e il secondo è la forza risultante dalla reciproca influenza di particelle lontane fra loro, ottenibile con il metodo PM.

Capitolo 2

Proprietà delle strutture su grande scala

2.1 Le funzioni di correlazione: definizioni

La funzione di correlazione è stata per molti anni il principale metodo di analisi delle proprietà del clustering delle galassie e degli ammassi di galassie. Sebbene essa possa essere applicata a varie classi di oggetti come quasar, radio galassie o altro, in questo capitolo ci concentreremo sulla sua applicazione alle distribuzioni di galassie e ammassi di galassie. Originariamente essa fu applicata a distribuzioni bidimensionali di oggetti ma con l'avvento dei primi estesi cataloghi di misure di redshift, se ne è estesa l'applicazione anche a distribuzioni tridimensionali.

La probabilità congiunta $\delta^2 P_2$ di trovare due galassie poste rispettivamente nei volumi δV_1 e δV_2 posti ad una distanza \vec{r}_{12} l'uno dall'altro è esprimibile mediante la seguente espressione:

$$\delta^2 P_2 = n_V^2 [1 + \xi(r_{12})] \delta V_1 \delta V_2, \quad (2.1.1)$$

ove n_V è la densità di galassie per unità di volume e $\xi(r)$ è la funzione di correlazione spaziale a due punti, la quale per l'isotropia e omogeneità dell'universo non dipende dall'orientazione del vettore \vec{r}_{12} ma solo dal suo modulo. Si può verificare che se le galassie fossero distribuite in modo del tutto casuale nello spazio si avrebbe $\xi(r) = 0$. Se $\xi(r) > 0$ significa che le galassie sono fra loro correlate, se invece $\xi(r) < 0$ non sono

correlate. Dall'equazione (2.1.1) si può ricavare una relazione che fornisce il numero medio di galassie poste ad una distanza r da una data galassia,

$$\langle N \rangle_r = \frac{4}{3}\pi n_V r^3 + 4\pi n_V \int_0^r \xi(r'_{12}) r'_{12}{}^2 dr'_{12}, \quad (2.1.2)$$

in cui il secondo termine a destra dell'equazione esprime l'eccesso o il difetto di galassie rispetto ad una distribuzione casuale.

Storicamente le funzioni di correlazione che per prime sono state applicate allo studio delle proprietà di clustering delle galassie furono le funzioni di correlazione angolare a due punti $w(\vartheta)$ definite mediante

$$\delta^2 P_2 = n_\Omega^2 [1 + w(\vartheta_{12})] \delta\Omega_1 \delta\Omega_2, \quad (2.1.3)$$

che similmente alla (2.1.1) fornisce la probabilità di trovare proiettate sulla volta celeste due galassie all'interno dei due elementi di angolo solido $\delta\Omega_1$ e $\delta\Omega_2$ separati dall'angolo ϑ_{12} e n_Ω è il numero di galassie proiettate in cielo per angolo solido. Nel paragrafo successivo vedremo come le due forme della funzione di correlazione sono riconducibili l'una all'altra.

In maniera analoga si possono definire le funzioni di correlazione per $N > 2$ punti. In particolare per la funzione di correlazione a tre punti si ha

$$\delta^3 P_3 = n_V^3 [1 + \xi(r_{12}) + \xi(r_{23}) + \xi(r_{31}) + \zeta(r_{12}, r_{23}, r_{31})] \delta V_1 \delta V_2 \delta V_3 \quad (2.1.4)$$

ove $\delta^3 P_3$ è la probabilità di trovare tre galassie nei volumi δV_1 , δV_2 e δV_3 posti rispettivamente a distanza r_{12} , r_{23} e r_{31} e ζ è la funzione di correlazione ridotta a tre punti. La funzione di correlazione angolare a tre punti z è definita mediante l'equazione

$$\delta^3 P_3 = n_\Omega^3 [1 + w(\vartheta_{12}) + w(\vartheta_{23}) + w(\vartheta_{31}) + z(\vartheta_{12}, \vartheta_{23}, \vartheta_{31})] \delta\Omega_1 \delta\Omega_2 \delta\Omega_3 \quad (2.1.5)$$

che è la probabilità di trovare tre galassie nei tre elementi di angolo solido $\delta\Omega_1$, $\delta\Omega_2$, $\delta\Omega_3$, separati rispettivamente dalle distanze angolari ϑ_{12} , ϑ_{23} , ϑ_{31} sulla volta celeste. Nelle precedenti relazioni i termini $\xi(r_{ij})$ e $w(\vartheta_{ij})$ servono a tener conto del contributo, alla probabilità $\delta^3 P_3$, di tutte le possibili coppie di punti, soddisfacenti alle condizioni poste sulle distanze reciproche r_{12} , r_{23} e r_{31} , alle quali manca il terzo punto necessario per formare le terne cercate.

Ulteriormente per $N = 4$ si ha che la funzione di correlazione η è definita da

$$\begin{aligned} \delta^4 P_4 = n_V^4 [& 1 + \xi(r_{12}) + \xi(r_{13}) + \xi(r_{14}) + \xi(r_{23}) + \xi(r_{24}) + \xi(r_{34}) + \\ & + \xi(r_{12})\xi(r_{34}) + \xi(r_{13})\xi(r_{24}) + \xi(r_{14})\xi(r_{23}) + \\ & + \zeta(r_{12}, r_{23}, r_{31}) + \zeta(r_{12}, r_{24}, r_{41}) + \zeta(r_{13}, r_{34}, r_{41}) + \zeta(r_{23}, r_{34}, r_{42}) + \\ & + \eta(r_{12}, r_{13}, r_{14}, r_{23}, r_{24}, r_{34})] \delta V_1 \delta V_2 \delta V_3 \delta V_4 \end{aligned} \quad (2.1.6)$$

e in modo analogo si può definire la funzione di correlazione angolare a quattro punti u . Analogamente a quanto detto prima, tutti i termini misti del tipo $\xi(r_{12})\xi(r_{34})$ e $\zeta(r_{12}, r_{23}, r_{31})$ ci danno il contributo alla probabilità $\delta^4 P_4$, proveniente da tutte quelle terne di punti a cui manca il quarto punto, soddisfacente alle condizioni imposte sulle distanze reciproche r_{12} , r_{13} , r_{14} , r_{23} , r_{24} e r_{34} , necessario per formare le quaterne cercate. Sulla falsariga di quanto sinora fatto è possibile costruire l'espressione della funzione di correlazione spaziale a 5 punti τ e di quella angolare t e così via per tutte le altre.

2.2 L'equazione di Limber

Una proprietà particolarmente utile delle funzioni di correlazione, e specialmente di quella a due punti, è che esiste una relazione relativamente semplice fra loro forma spaziale e quella angolare.

Innanzitutto introduciamo la funzione di luminosità $\Phi(L)$ nella seguente forma

$$dN = \Phi(L)dL,$$

ove dN è il numero di galassie per unità di volume con luminosità compresa fra L ed $L + dL$. Possiamo definire funzione di luminosità anche la relazione $\Psi(M) = \Phi(L)[dL/dM]$, espressa mediante la

$$\delta^2 P = \Psi(M)\delta M\delta V \quad (2.2.1)$$

che rappresenta la probabilità di incontrare nell'elemento di volume δV una galassia di magnitudine compresa fra M e $M + \delta M$. Similmente alla (2.1.1) la probabilità

congiunta di trovare due galassie una di magnitudine compresa tra M_1 e $M_1 + \delta M_1$ nel volumetto δV_1 e l'altra di magnitudine compresa tra M_2 e $M_2 + \delta M_2$ nel volumetto δV_2 distanti fra loro di r_{12} è esprimibile mediante la

$$\delta^4 P = [\Psi(M_1)\Psi(M_2) + G(M_1, M_2, r_{12})]\delta M_1\delta M_2\delta V_1\delta V_2, \quad (2.2.2)$$

ove la funzione G tiene conto della correlazione tra le galassie. Supponiamo ora che la luminosità di una galassia sia indipendente dalla posizione che essa occupa in cielo rispetto alle altre galassie. Ciò significa che la funzione $\Psi(M)$ è indipendente dal grado di correlazione tra le galassie. Una tale ipotesi, chiamata *ipotesi di Limber*, pare essere confermata dalle osservazioni. Possiamo così porre

$$G(M_1, M_2, r_{12}) = \Psi(M_1)\Psi(M_2)\xi(r_{12}). \quad (2.2.3)$$

I cataloghi, normalmente, raccolgono la posizione delle galassie più brillanti di una data magnitudine limite m_0 all'interno di una data regione sulla sfera celeste. E dunque necessario tener conto dell'errore sistematico compiuto dall'osservatore nella catalogazione di oggetti con magnitudine apparente $m \simeq m_0$. A tal scopo introduciamo una funzione di selezione $f(m - m_0)$ che quantifica la probabilità che un osservatore includa una galassia con magnitudine apparente m nel suo catalogo. La forma di questa funzione è tale che per $m \ll m_0$ essa assuma valori molto prossimi a uno, mentre per $m \gg m_0$ essa tende a zero ed ha un netto troncamento per $m \simeq m_0$. Oltre a ciò la funzione di luminosità delle galassie ha una magnitudine caratteristica data da $M^* \simeq -19.5 + 5 \log h$ e tende rapidamente a zero per $M < M^*$. Supponiamo che sia D^* la distanza posta alla quale una galassia, appartenente ad un dato catalogo, di magnitudine assoluta M^* venga vista con magnitudine apparente m_0 . Mediante la relazione $m - M = -5 + 5 \log D$ si giunge alla

$$D^* = 10^{0.2(m_0 - M^*) - 5}, \quad (2.2.4)$$

con D^* espresso in Mpc. Dalle equazioni (2.2.1) e (2.2.4) si ottiene l'espressione che fornisce il numero di galassie di un dato catalogo per unità di angolo solido

$$n_\Omega = D^{*3} \int_0^\infty x^2 dx \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(M) f(M - M^* + 5 \log x) dM =$$

$$= D^{*3} \int_0^{\infty} \psi(x)x^2 dx \quad (2.2.5)$$

avendo posto $x = r/D^*$ e

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(M)f(M - M^* + 5 \log x)dM. \quad (2.2.6)$$

La funzione $\psi(x)$ così definita rappresenta il numero di galassie per unità di volume appartenenti al catalogo poste ad una distanza espressa mediante la relazione $r = xD^*$. È stato calcolato che in buona approssimazione per tale funzione si ha

$$\psi(x) = n_V x^{-5\beta} \quad (\beta = 0.25; x < 1) \quad (2.2.7)$$

$$\psi(x) = n_V x^{-5\alpha} \quad (\alpha = 0.75; 1 < x < x_0) \quad (2.2.8)$$

$$\psi(x) = 0 \quad (x > x_0 \simeq 10^{2/5\alpha} = 10^{8/15}). \quad (2.2.9)$$

Partendo ora dalle equazioni (2.2.2) e (2.2.3) si riottiene l'equazione (2.1.3):

$$\begin{aligned} \delta^2 P_2 &= n_{\Omega}^2 [1 + w(\vartheta_{12})] \delta\Omega_1 \delta\Omega_2 = \\ &= D^{*6} \int_0^{\infty} \psi(x_1)x_1^2 dx_1 \int_0^{\infty} \psi(x_2)x_2^2 [1 + \xi(r_{12})] dx_2 \delta\Omega_1 \delta\Omega_2, \end{aligned} \quad (2.2.10)$$

ove si è posto

$$r_{12}^2 = D^{*2}(x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 \cos \vartheta_{12}). \quad (2.2.11)$$

A questo punto per rendere più semplici i successivi passaggi conviene fare il seguente cambio di variabili:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{x_1 - x_2}{x\vartheta_{12}}.$$

Poichè assumiamo che il catalogo considerato sia un buon campione dell'universo, deve essere verificata la condizione che la lunghezza di correlazione sia molto minore di D^* . A causa di questa condizione il principale contributo agli integrali dell'equazione (2.2.10) di $\xi(r_{12})$ proviene da punti per i quali $x_1 \simeq x_2 \simeq 1$ e che sono separati da un angolo ϑ_{12} molto piccolo. Per questo motivo possiamo riscrivere la (2.2.11) nella seguente forma

$$r_{12}^2 \simeq D^{*2}x^2\vartheta_{12}^2(1 + y^2). \quad (2.2.12)$$

e sostituendo la relazione appena trovata nella (2.2.10) si ottiene

$$w(\vartheta_{12}) \simeq \frac{\vartheta_{12} \int_0^\infty \psi^2(x) x^5 dx \int_{-\infty}^{+\infty} \xi[D^* x \vartheta_{12} (1+y^2)^{1/2}] dy}{[\int_0^\infty \psi(x) x^2 dx]^2}, \quad (2.2.13)$$

detta *equazione di Limber*. Tale relazione gode della seguente proprietà di scala

$$w' \left(\vartheta'_{12} = \frac{D^*}{D^{*'}} \vartheta_{12} \right) = \frac{D^*}{D^{*'}} w(\vartheta_{12}),$$

ove w e w' sono le funzioni di correlazione angolare riferite ai due cataloghi le cui distanze caratteristiche sono rispettivamente D^* e $D^{*'}$. Sempre mantenendo l'ipotesi che l'angolo di separazione fra gli oggetti sia molto piccolo, è possibile ricavare le equazioni di Limber che legano le forme spaziali e angolari delle equazioni di correlazione con $N > 2$.

2.3 La funzione di correlazione a due punti

I metodi di calcolo delle funzioni di correlazione a due punti $\xi(r)$ o $w(\vartheta)$ generalmente sono basati sul confronto fra distribuzioni poissoniane e reali che condividono le medesime caratteristiche. In altre parole le distribuzioni poissoniane di confronto vengono costruite in modo che in una regione di spazio uguale a quella del campione reale vengano distribuiti il medesimo numero di oggetti e che si tengano conto degli effetti di bordo. A questo punto si risale alla funzione ξ attraverso una delle seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} 1 + \hat{\xi} &\simeq \frac{n_{DD}(r)}{n_{RR}(r)} \\ 1 + \hat{\xi} &\simeq \frac{n_{DD}(r)}{n_{DR}(r)} \\ 1 + \hat{\xi} &\simeq \frac{n_{DD}(r)n_{RR}(r)}{n_{RR}^2(r)} \end{aligned}$$

ove i termini $n_{DD}(r)$, $n_{RR}(r)$ e $n_{DR}(r)$ sono rispettivamente il numero di coppie di oggetti posti a distanza r l'uno dall'altro nella distribuzione reale, in quella casuale e prendendo il primo oggetto dalla distribuzione reale e il secondo da quella casuale.

Il secondo di questi estimatori risente meno degli altri degli effetti di bordo ma per grandi campioni fornisce i medesimi risultati degli altri.

Applicando i metodi di analisi sin qui descritti sui cataloghi bidimensionali di posizioni delle galassie proiettate sulla volta celeste, si è riusciti a mostrare che entro un ampio intervallo di angoli la funzione di correlazione $w(\vartheta)$ è ben approssimata dalla legge di potenza

$$w(\vartheta) \simeq A^* \vartheta^{-\delta} \quad (\vartheta_{min} \leq \vartheta \leq \vartheta_{max}; \delta \simeq 0.8), \quad (2.3.1)$$

nella quale l'ampiezza A^* è un termine che dipende dalla distanza caratteristica D^* del catalogo di galassie e l'intervallo angolare su cui è definita la relazione corrisponde ad una separazione spaziale nell'ordine di $0.1 h^{-1}\text{Mpc} \leq r \leq 10 h^{-1}\text{Mpc}$ a quella distanza. Supponiamo ora che su un certo intervallo di scale la funzione di correlazione spaziale sia esprimibile mediante la relazione

$$\xi(r) = Br^{-\gamma}, \quad (2.3.2)$$

allora sostituendo tale relazione nella (2.2.13) si ottiene

$$w(\vartheta) = A\vartheta^{1-\gamma} = A\vartheta^{-\delta}, \quad (2.3.3)$$

con le due costanti A e B legate dalla seguente relazione:

$$\frac{A}{B} = \frac{\Gamma(1/2)\Gamma[(\gamma-1)/2] \int_0^\infty x^{5-\gamma}\psi^2(x)dx}{\Gamma(\gamma/2) [\int_0^\infty x^2\psi(x)dx]^2} D^{*\ -\gamma}, \quad (2.3.4)$$

ove Γ è la funzione Gamma di Eulero. Detto ciò va notato che la (2.3.2) e la (2.3.1) sono fra loro consistenti se

$$\xi(r) \simeq \left(\frac{r}{r_{0g}} \right)^{-\gamma}, \quad (2.3.5)$$

ove $r_{0g} \simeq 5 h^{-1}\text{Mpc}$ e $\gamma \simeq 1.8$ all'interno dell'intervallo di scale dell'ordine di $0.1 h^{-1}\text{Mpc} \leq r \leq 10 h^{-1}\text{Mpc}$; per scale maggiori la funzione di correlazione sembrerebbe tendere a zero pur essendo difficile da valutare con precisione a causa dell'alto rumore statistico. L'analisi di cataloghi tridimensionali di oggetti attraverso tale formalismo ha riconfermato i risultati ottenuti per le distribuzioni bidimensionali. Nella formula precedente, posto $\xi = 1$, la quantità r_{0g} viene spesso indicata in

letteratura come lunghezza di correlazione della distribuzione di galassie, in altre parole segna il confine fra l'evoluzione in regime lineare e quella in regime non lineare. Sebbene storicamente la funzione di correlazione a due punti sia stata di grande aiuto per lo studio delle proprietà del clustering delle galassie, grazie al miglioramento delle tecniche di osservazione e delle capacità di analisi dei dati, attualmente allo scopo viene utilizzata la funzione di correlazione a tre punti. Attraverso quest'ultima siamo in grado di ottenere una migliore stima del grado di correlazione esistente fra gli oggetti di una distribuzione. Rimandiamo al successivo paragrafo l'esposizione dei risultati ottenuti mediante le funzioni di correlazione con $n > 2$.

Per quanto riguarda gli ammassi di galassie, l'analisi del catalogo di Abell degli ammassi ricchi, cioè quelli che contengono un numero di oggetti superiore a 65, mediante la funzione di correlazione a due punti ha fornito il seguente risultato:

$$\xi_c(r) \simeq \left(\frac{r}{r_{0c}} \right)^{-\gamma}, \quad (2.3.6)$$

ove r è definito nel intervallo $5 h^{-1} \text{Mpc} \leq r \leq 75 h^{-1} \text{Mpc}$, r_{0c} assume valori compresi tra 12 e $25 h^{-1} \text{Mpc}$ e $\gamma \simeq 1.8$. La somiglianza tra la precedente relazione e la (2.3.5) è davvero notevole. Una analoga analisi condotta sugli ammassi di galassie poveri, appartenenti ai cataloghi di Abell e Lick, e quelli più ricchi del catalogo di Abell, cioè quelli con un numero di oggetti superiore a 105, ha fornito come stima della lunghezza di correlazione r_{0c} rispettivamente $18 h^{-1} \text{Mpc}$ e $50 h^{-1} \text{Mpc}$. Tali risultati sembrerebbero indicare l'esistenza di una relazione tra la funzione di correlazione degli ammassi di ricchezza "i" e la loro distanza interparticellare media l_i

$$\xi(r) \simeq \left(\frac{r}{r_{0c,i}} \right)^{-\gamma} \simeq C_i \left(\frac{r}{l_i} \right)^{-\gamma}, \quad (2.3.7)$$

ove $C_i \simeq \left(\frac{r_{0c,i}}{l_i} \right)^\gamma \simeq \text{cost} \simeq 0.3 \div 0.4$. Se un tale risultato fosse confermato, indicherebbe che la distribuzione degli ammassi gode di una proprietà di invarianza di scala o, in altri termini, frattale. Più recentemente Davis e Peebles (1983) analizzando il catalogo di galassie CfA per mezzo della funzione di correlazione a due punti hanno ricavato i seguenti valori per γ e r_{0c} : $\gamma = 1.77$, $r_{0c} = 5.4 \pm 0.3 \text{Mpc}$ in buon accordo con quelli precedentemente riportati.

2.4 Le funzioni di correlazione a $N (> 2)$ punti

Il grosso problema che si deve risolvere quando si vuole ricavare relazioni analoghe a quelle incontrate nei precedenti paragrafi per le funzioni di correlazione di ordini superiori a due, consiste nell'interpretazione di quest'ultime, in quanto esse sono funzione di tutti i vettori che collegano in tutti i modi possibili gli N oggetti appartenenti al campione fra di loro. Un possibile aiuto in tale senso ci viene dal fatto che, poichè la funzione di correlazione a due punti mostra aver un andamento ben rappresentabile mediante una legge di potenza, ci si potrebbe aspettare che le funzioni di correlazione di ordine di ordini superiori siano legate a quelle di ordini inferiori, quella di ordine N con quella di ordine $N - 1$ a sua volta con quella di ordine $N - 2$, mediante una semplice relazione di scala.

Analogamente a quanto già mostrato per il calcolo della funzione ξ , per il calcolo della funzione di correlazione ridotta a tre punti ζ si è ricorsi al confronto tra il campione considerato ed una distribuzione poissoniana dalle identiche caratteristiche. Per cui detti $\langle DDD \rangle$, $\langle DDR \rangle$ e $\langle RRR \rangle$ rispettivamente il numero di terne di oggetti posti a distanza r_{12} , r_{13} e r_{23} l'uno dall'altro tutti appartenenti al campione, il numero di terne per le quali due oggetti appartengono al campione ed uno ad una distribuzione casuale e il numero di terne trovate all'interno della distribuzione poissoniana si ha

$$\zeta(r_{12}, r_{13}, r_{23}) = \frac{\langle DDD \rangle - \langle DDR \rangle}{\langle RRR \rangle} + 2 \quad . \quad (2.4.1)$$

La funzione ζ sembra soddisfare la seguente relazione di scala rispetto alla ξ

$$\zeta(r_{12}, r_{13}, r_{23}) = Q(\xi_{12}\xi_{23} + \xi_{23}\xi_{31} + \xi_{31}\xi_{12}) \quad (2.4.2)$$

con Q costante. Una tale relazione interpreta molto bene l'andamento dei dati osservativi su un intervallo di distanze pari a $50 h^{-1}\text{kpc} < r < 5 h^{-1}\text{Mpc}$ all'interno del quale $0.6 \lesssim Q \lesssim 1.1$.

In un recente lavoro Plionis et al. (1992), dall'analisi dei cataloghi di Abell e ACO attraverso la funzione di correlazione a tre punti, hanno appurato che essa è ben approssimata dalla (2.4.2). Essi, potendo contare su cataloghi di redshift più completi di quelli precedentemente usati per analoghe indagini, hanno ricalcolato il

valore di Q che compare nella detta formula, ottenendo i seguenti risultati:

$$Q_{NGC} \approx 0.65, \quad Q_{SGC} \approx 0.3, \quad Q_{ACO} \approx 0.7,$$

con un margine di errore pari a $\sim \pm 0.2$. Le sigle NGC e SGC indicano i sottocampioni del catalogo di Abell comprendenti rispettivamente gli oggetti situati nell'emisfero celeste nord e sud. Come si vede i valori sono in buon accordo con quelli precedentemente trovati.

2.5 Gli spettri di potenza

Supponiamo di aver a che fare con un campo statisticamente omogeneo e popolato in modo casuale. Sotto tale ipotesi risulta più vantaggioso lavorare con la trasformata di Fourier della funzione di correlazione piuttosto che con la funzione di correlazione stessa. Grazie al teorema di Wiener-Khintchine si dimostra facilmente che la funzione di correlazione a due punti è la trasformata di Fourier dello spettro di potenza. Supponiamo che il volume V_u sia un buon campione dell'universo e sia ρ la funzione di distribuzione della materia al suo interno. Definiamo ora il contrasto di densità in tal modo:

$$\delta = (\rho - \langle \rho \rangle) / \rho, \quad (2.5.1)$$

si ha allora che la trasformata di Fourier di δ è

$$\delta_{\vec{k}} = V_u^{-1} \int \delta(\vec{r}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} d\vec{r}.$$

Mediando il quadrato di $\delta_{\vec{k}}$ per $\vec{k} \neq 0$ si ottiene

$$\langle |\delta_{\vec{k}}|^2 \rangle = V_u^{-1} \int \xi(\vec{r}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} d\vec{r}, \quad (2.5.2)$$

invertendo la relazione si ottiene

$$\xi(\vec{r}) = \frac{V_u}{(2\pi)^3} \int P(k) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} d\vec{k} \quad (2.5.3)$$

ove ξ è la funzione di correlazione a due punti, $P(k) = \langle |\delta_{\vec{k}}|^2 \rangle$ è lo spettro di potenza e gli integrali si intendono estesi a tutto il volume V_u . Per V_u tendente all'infinito si

ha che la relazione (2.5.2) si può ricondurre alla seguente forma

$$P(k) = \int \xi(\vec{r}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} d\vec{r} \quad . \quad (2.5.4)$$

Ciò nel caso si lavori su una distribuzione continua di materia l'equazione (2.5.3) assume la seguente forma:

$$\xi(\vec{r}) = \sum_{\vec{k}} \langle |\delta_{\vec{k}}|^2 \rangle e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \quad . \quad (2.5.5)$$

È necessario ora ricordare che il campione considerato è il risultato della modulazione del campo di densità reale mediante una qualche funzione di selezione $F(x)$ che tiene conto del fatto che se lavoriamo con un campione limitato in magnitudine e se esso è posto a grande distanza, alcuni oggetti potrebbero non venir inclusi nel suddetto campione. Si ha dunque che lo spettro di potenza osservato altro non è la convoluzione dello spettro di potenza "reale" con la funzione $|F_k|^2$, che è il modulo quadro della trasformata di Fourier della funzione $F(x)$. Per non doverci confrontare con una tale dipendenza di $P(k)$ dal volume del campione considerato possiamo ricorrere alla seguente forma di spettro di potenza adimensionale $\Delta^3 \simeq k^3 P(k)$. Analizzando lo spettro di potenza del clustering delle galassie su diversi campioni Peacock e Dodds (1994) hanno potuto constatare che i risultati sono ben approssimati dalla seguente relazione

$$\Delta^2(k) = \frac{(k/k_0)^{1.6}}{1 + (k/k_c)^{-2.4}} \quad . \quad (2.5.6)$$

Per i valori dei due parametri si è la migliore approssimazione risulta essere $k_c \simeq 0.015 \div 0.025 \text{ hMpc}^{-1}$ e $k_0 \simeq 0.19 \text{ hMpc}^{-1}$. Su scale molto grandi una tale relazione approssima bene lo spettro per uno scenario CDM a bassa densità o per quello CHDM.

Un tale formalismo può essere, naturalmente alle funzioni di correlazione di ordine n superiore a due. Per esempio nel caso in cui n sia uguale a tre, presi \vec{k}_i tali che $\sum \vec{k}_i = 0$, la quantità

$$B(k_1, k_2, k_3) = \langle \delta_{k_1} \delta_{k_2} \delta_{k_3} \rangle$$

è definita come bispettro.

2.6 Conteggi in celle (counts in cells)

Un ulteriore semplice metodo per quantificare la correlazione delle galassie o degli ammassi di galassie su grande scala è costituito dall'osservazione di come si distribuisce la funzione $P_n(V)$ definite come la probabilità di trovare n oggetti in un fissato volume V che spazza casualmente lo spazio occupato dal campione oppure, analogamente, i momenti di tale distribuzione quali la varianza σ^2 e la skewness γ . L'utilizzo dei sopra citati momenti comporta vantaggi e svantaggi. Sebbene il loro impiego implichi una perdita di informazione rispetto all'uso della funzione di distribuzione originaria, si ha il vantaggio di poter contare su semplici relazioni che legano fra loro i momenti con le funzioni di correlazione. L'espressione dell'equazione della varianza si ricava in tal modo. Supponiamo di avere n oggetti distribuiti in un volume V . Dividiamo tale volume in sotto elementi di volume dV_k contenenti ciascuno n_k oggetti. Supponiamo di aver ridotto il volume dei sotto-elementi fino al punto tale che essi possano contenere o un solo oggetto o nessuno, per cui si avrà che $n = \sum n_k$. Il numero di oggetti che ci aspettiamo di trovare nell'elemento di volume è dunque esprimibile mediante la relazione,

$$\langle n \rangle = \bar{n} = \sum_k \langle n_k \rangle = \int_V n dV = n_V V, \quad (2.6.1)$$

ove n_V è il numero medio di galassie per unità di volume. Il valore quadratico medio di n è dato da

$$\langle n^2 \rangle = \sum_k \langle n_k^2 \rangle + \sum_{k \neq l} \langle n_k n_l \rangle . \quad (2.6.2)$$

Dal momento che n_k non può assumere altri valori al di fuori di 0 o 1 il primo termine della espressione sulla destra può essere posto uguale a $\sum \langle n_k \rangle$ e il secondo si riduce alla forma $n_V^2 dV_1 dV_2 (1 + \xi_{12})$. Sostituendo tali espressioni nella relazione precedente si ottiene la

$$\langle n^2 \rangle = n_V V + (n_V V)^2 + n_V^2 \int \xi_{12} dV_1 dV_2 . \quad (2.6.3)$$

Posto ora

$$\left\langle \left(\frac{n - \bar{n}}{n} \right)^2 \right\rangle = \left\langle \left(\frac{\Delta n}{n} \right)^2 \right\rangle$$

si ricava facilmente che

$$\sigma^2 \equiv \left\langle \left(\frac{\Delta n}{\bar{n}} \right)^2 \right\rangle = \frac{1}{\bar{n}} + \frac{1}{V^2} \int \int \xi_{(2)}(r_{12}) dV_1 dV_2, \quad (2.6.4)$$

ove \bar{n} è la densità media di galassie per cella di volume V . Mediante una simile derivazione si ottiene la seguente espressione per la skewness

$$\gamma \equiv \left\langle \left(\frac{\Delta n}{\bar{n}} \right)^3 \right\rangle = \frac{1}{\bar{n}} + \frac{3\sigma^2}{\bar{n}} + \frac{1}{V^3} \int \int \int \xi_{(3)} dV_1 dV_2 dV_3 \quad . \quad (2.6.5)$$

Analogamente alla funzione di distribuzione dei conteggi delle galassie si può definire la funzione di probabilità dei vuoti, che fornisce la probabilità di non trovare alcun oggetto entro un dato volume V scelto a caso

$$\mathcal{P}(\lambda) \equiv \sum_{N=0}^{\infty} \lambda^N P_N(V). \quad (2.6.6)$$

Tale funzione è collegata analiticamente alle funzioni di correlazione ridotte di tutti gli ordini mediate su tutto il volume, $\bar{\xi}_{(N)}$, attraverso la seguente relazione

$$\log \mathcal{P}(\lambda) = \sum_{N=1}^{\infty} \frac{(\lambda - 1)^N}{N!} (\bar{n})^N \bar{\xi}_{(N)}, \quad (2.6.7)$$

ove

$$\bar{\xi}_{(N)} \equiv \int \cdots \int \xi_{(N)}(r_{ij}) dV_1 \cdots dV_N. \quad (2.6.8)$$

Ponendo $\lambda = 0$ nell'equazione (2.6.7) si ottiene

$$\log P_0(V) = \sum_{N=1}^{\infty} \frac{(-1)^N}{N!} \bar{\xi}_{(N)}.$$

La funzione di probabilità dei vuoti è facilmente ricavabile dalle simulazioni o dai campioni reali ed è fortemente dipendente dalle funzioni di correlazione ridotte di tutti gli ordini. L'applicazione di questo formalismo a diversi cataloghi, su scale direttamente accessibili tramite le osservazioni, ha mostrato che gli ammassi di galassie seguono effettivamente la legge di scala nell'ipotesi gerarchica. Nonostante sia una utile statistica, essa mostra però alcuni limiti dovuti al fatto che non è in grado di rivelare la geometria, o topologia, dei vuoti individuati. Inoltre la funzione di probabilità $\mathcal{P}(\lambda)$ è fortemente dipendente dalla densità del campione analizzato. Infatti è più facile incontrare un vuoto di estensione arbitraria V in un volume in cui sono distribuiti pochi punti rispetto ad uno in cui ne sono distribuiti molti.

2.7 Topologia

Un diverso approccio allo studio delle proprietà della distribuzione delle galassie è quello di analizzarne la topologia. Il metodo si basa sull'uso dell'invariante topologico detto *genus* delle superfici di iso-densità della distribuzione. Il *genus* di una superficie consiste nella differenza tra il numero di buchi e quello di regioni isolate di cui è composta; in altri termini esso rappresenta il numero massimo di tagli che si possono fare alla superficie senza dividerla in due parti distinte.

Innanzitutto, poichè la statistica del *genus* si applica a distribuzioni continue piuttosto che a distribuzioni discrete di materia, si smussa la distribuzione delle galassie mediante un filtro, solitamente gaussiano. In seguito si individuano per la distribuzione continua ottenuta le superfici sulle quali la densità è maggiore di un dato valore di soglia ν . Indichiamo con $G(\nu)$ il valore che assume il *genus* per le dette curve. Per mezzo del teorema di Gauss - Bonnet si verifica che $G(\nu)$ è legato all'integrale sulla curvatura gaussiana $K = 1/a_1 a_2$, ove a_1 e a_2 sono i raggi principali di curvatura delle superfici studiate, S_ν , nel seguente modo

$$4\pi[1 - G(\nu)] = \int_{S_\nu} K dS. \quad (2.7.1)$$

Al posto di G per convenzione si preferisce utilizzare $G_S = G - 1$. In seguito a tale definizione si ha che in corrispondenza di superfici multi-connesse G_S assume valori maggiori o uguali a zero, mentre per superfici semplicemente connesse si ha $G_S < 0$. Dividendo G_S per il volume occupato dal campione si ottiene g_S , che mappa il *genus* per unità di volume.

Per una distribuzione gaussiana, caratterizzata dal fatto di mostrare pari probabilità per regioni sovradense e sottodense, è possibile il calcolo analitico di $g_S(\nu)$. Si trova che:

$$g_S(\nu) = \frac{1}{4\pi^2} \left[\frac{\langle k^2 \rangle}{2} \right]^{3/2} (1 - \nu^2) \exp\left(-\frac{\nu^2}{2}\right), \quad (2.7.2)$$

ove si è posto

$$\langle k^2 \rangle = \frac{\int k^2 P(k) d^3k}{\int P(k) d^3k},$$

e $P(k)$ è lo spettro di potenza. Nel caso in cui sia $P(k) \propto k^n$ convoluto con un filtro gaussiano ($e^{-k^2\lambda^2/2}$) la (2.7.2) assume la forma

$$g_S(\nu) = \frac{1}{4\pi^2\lambda^3} \left[\frac{3+n}{3} \right]^{2/3} (1-\nu^2) \exp\left(-\frac{\nu^2}{2}\right). \quad (2.7.3)$$

Si può facilmente verificare che la costante di normalizzazione $(1/4\pi^2\lambda^3)[(3+n)/3]^{2/3}$ è dipendente dallo spettro di potenza. Poichè gli effetti dell'evoluzione gravitazionale non lineare vengono inizialmente osservati su piccole scale e poi su grandi scale, se si smussa troppo il campo di densità si rischia di far sparire completamente le strutture su piccola scala presenti in una distribuzione. Ciò che si riottiene è di conseguenza una distribuzione gaussiana. Dunque risulta impossibile confrontare due modelli dotati di diverso spettro di potenza poichè la $g_S(\nu)$ in entrambi i casi assume la forma di una gaussiana. La capacità della statistica del genus di individuare le deviazioni da una distribuzione gaussiana in un campione risulta molto utile nell'analisi di modelli con condizioni iniziali non gaussiane o in quella di modelli che ricorrono a meccanismi non gravitazionali per spiegare la formazione delle strutture su grande scala.

Come già accennato in precedenza, in una distribuzione gaussiana si osserva una perfetta simmetria tra le regioni a bassa densità, i “vuoti” caratterizzati da valori negativi di ν , e quelle ad alta densità, i “pieni” caratterizzati da valori positivi di ν . A causa di tale simmetria le zone sovradense e sottodense assumono gli stessi valori del genus mostrando conseguentemente la medesima topologia, usualmente chiamata “*sponge-like topology*”, a causa dell'aspetto assunto simile a quello di una spugna. L'azione della gravità rompe una tale simmetria dando origine a due possibili topologie. Se la curva $g_S(\nu)$ si sposta verso i valori di ν negativi, le regioni a bassa densità sono maggiormente connesse di quelle ad alta. A questa topologia ci si riferisce con il nome di “*meatball topology*” vista la rassomiglianza delle strutture osservate ad un insieme di tanti ammassi. Se al contrario la curva $g_S(\nu)$ si sposta verso valori positivi di ν sono le regioni ad alta densità ad essere maggiormente connesse rispetto a quelle a bassa densità. In tal caso la topologia viene convenzionalmente chiamata “*swiss-cheese topology*”, poichè assomiglia al formaggio emmenthal. Numerosi lavori hanno verificato che il genus riesce facilmente a discriminare fra modelli in cui gli

oggetti seguono distribuzioni gaussiane, o lungo filamenti, clusters o bubbles.

L'operazione di filtraggio del campo di densità pone un notevole problema. Poiché i cataloghi di redshift a tutt'oggi disponibili campionano ancora in modo troppo rado la volta celeste si è costretti a filtrare molto il campo di densità tracciato dagli oggetti in essi contenuti al fine di renderlo continuo. Un filtraggio effettuato su scale maggiori di quelle della lunghezza di correlazione, in virtù del teorema del limite centrale, fa sí che le curve del genus tendano ad assumere la forma caratteristica della topologia gaussiana. Al contrario per lunghezze di filtraggio inferiori $g_S(\nu)$ mostrano deviazioni in direzioni della meatball topology. Le strutture su grande scala mostrerebbero, se analizzate su opportune scale, una maggiore connessione tra le regioni a bassa densità che tra quelle ad alta.

La statistica del genus, precedentemente descritta, non è in grado di descrivere completamente la topologia di una superficie. Infatti due superfici pur avendo il medesimo valore per il genus, possono avere forma, dimensioni e proprietà geometriche diverse. Si è così introdotta una statistica analoga al genus, $\Gamma(\nu)$ che è gode della proprietà di essere una funzione dispari di ν per un campo gaussiano bidimensionale, mentre il genus lo è pari. Per un campo gaussiano con spettro $P(k)$ si ricava la seguente espressione analitica

$$\Gamma(\nu) = \frac{1}{\pi\sqrt{3}} \langle k^2 \rangle \exp\left(-\frac{\nu^2}{2}\right) \quad (2.7.4)$$

che qualora per lo spettro di potenza si avesse $P(k) \propto k^n$ e fosse convoluto con un filtro gaussiano si ridurrebbe alla

$$\Gamma(\nu) = \frac{1}{\pi\lambda} \left[\frac{3+n}{3}\right]^{1/2} \exp\left(-\frac{\nu^2}{2}\right) . \quad (2.7.5)$$

Anche in questo caso il fattore di normalizzazione $(1/\pi\lambda)[(3+n)/3]^{1/2}$ dipende esclusivamente dallo spettro di potenza. Se le curve $\Gamma(\nu)$ trovate per un campione si collocano a sinistra della (2.7.5) la sua topologia è a meatball, se invece cadono a destra è a swiss-cheese.

Parimenti al genus anche questa statistica è in grado di riconoscere la forma delle strutture lungo cui si distribuiscono gli oggetti. La sua applicazione ad alcuni cataloghi di galassie ha mostrato che se il campo di densità viene filtrato a $6h^{-1}$ Mpc la

curva di $\Gamma(\nu)$ ha una forte deviazione dalla curva tipica di una distribuzione gaussiana. Inoltre, in maniera il filtraggio su scale doppie rispetto alla precedente fa scomparire una tale deviazione ripristinando la simmetria rispetto allo zero della $\Gamma(\nu)$. Il risultato ottenuto è in perfetto accordo a quello già ricavato dall'uso della statistica del genus.

2.8 Analisi frattale

Come già accennato alla fine del paragrafo (2.3), dall'analisi della correlazione fra gli oggetti appartenenti ad alcuni cataloghi risulterebbe che la distribuzione degli ammassi di galassie goda di una proprietà di invarianza di scala o frattale. Daremo quindi di seguito un breve accenno al formalismo su cui si basa l'analisi frattale.

Consideriamo una massa racchiusa in una sfera di raggio r incentrata su una data galassia e indichiamo con $M(r)$ tale massa. Se abbiamo a che fare con distribuzioni statistiche ben descritte da relazioni del tipo (2.3.5), nell'intervallo di scale per le quali si ha $\xi(r) \gg 1$ si ha

$$M(r) \propto \xi(r)r^3 \propto r^{D_2}, \quad (2.8.1)$$

ove $D_2 = 3 - \gamma$. Dal momento che, come già accennato nei precedenti paragrafi, $\gamma \approx 1.8$ si ha che $M(r) \propto r^{1.2}$ e $D_2 = 1.2$. La quantità D_2 viene solitamente indicata con il nome di *dimensione frattale*. Si dimostra molto facilmente che se la massa si distribuisce lungo strutture unidimensionali si osserva che $M(r) \propto r$, se invece si distribuisce lungo piani si ha $M(r) \propto r^2$, infine se occupa omogeneamente tutto il volume a disposizione si ha $M(r) \propto r^3$.

Sinora tutti i tentativi fatti per spiegare le strutture osservate nell'universo mediante tale metodo hanno avuto scarso successo ciò è dovuto al fatto che un universo con struttura frattale semplice non necessariamente tende all'omogeneità su grande scala, contrariamente a quanto inizialmente assunto con il principio cosmologico. Per superare un simile ostacolo si è proposto l'impiego di un formalismo più sofisticato, detto multifrattale. Come precedentemente fatto, consideriamo una massa contenuta da una sfera di raggio r per la quale si ha $M(r) \propto r^{\alpha(x)}$, ove l'esponente α varia da punto a punto, contrariamente a quanto visto per il caso frattale semplice. Se

assumiamo che un sottoinsieme di punti del campione per un dato valore di α possa avere struttura monofrattale, allora possiamo supporre che l'intero campione altro non sia che la sovrapposizione di tanti sottocampioni monofrattali aventi ciascuno una diversa dimensione frattale, e in tal senso si dice che esso presenta proprietà multifrattali. La funzione $f(\alpha)$ che riassume tutti i valori di α assunti ha un unico massimo in corrispondenza del valore α_0 . Il termine $f(\alpha_0) = D_0$ viene indicato con *capacity dimension* dell'intero campione. Una notevole proprietà posseduta da un campione con struttura multifrattale è il fatto che la dimensione di scala del momento di ordine q dei conteggi in celle non sono indipendenti da q :

$$D_q = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{(q-1)} \frac{\log \sum_{i=1}^{N(r)} [n_i(r)/N]^q}{\log r},$$

ove $n_i(r)$ è il numero di occupazione della i -esima cella di lato r e N è il numero totale di celle, mentre nel caso si abbia a che fare con strutture monofrattali si ha $D_q = D_0$ per ogni q .

Sebbene i modelli multifrattali siano riusciti a dare un buona spiegazione delle proprietà di scala di cui gode la distribuzione su grande scala delle galassie, non si è ancora riusciti a stabilire un legame teorico fra essi e le equazioni che spiegano l'evoluzione del clustering delle galassie. Quello di cui si è certi però è che le funzioni $f(\alpha)$ e D_q dipendono l'uno dall'altro secondo le relazioni

$$\tau(q) = \alpha q - f(\alpha), \quad \alpha(q) = \frac{d\tau}{dq}, \quad D_q = \frac{\tau(q)}{q-1}. \quad (2.8.2)$$

Il metodo più semplice per verificare la consistenza del metodo di analisi appena descritto è quello di ricavare stime della funzione $f(\alpha)$ o delle quantità D_q direttamente dal campione. Nel far ciò va prestata attenzione al fatto che le relazioni (2.8) sono state ricavate facendo l'ipotesi che le dimensioni delle singole cellette siano molto piccole. Se la distribuzione con cui abbiamo a che fare è discreta una tale ipotesi causerebbe la non occupazione di talune di queste celle.

La procedura per ricavare le dette stime ricorre all'applicazione della funzione di partizione $Z(q, r)$, definita dalla relazione

$$Z(q, r) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N n_i^{q-1} \propto r^{\tau(q)}, \quad (2.8.3)$$

ove r è la dimensione della singola cella. Mappando Z in funzione di r ci si può ricavare $\tau(q)$ per ogni q e da quest'ultima, attraverso le (2.8), si ottiene D_q . Per $q > 2$ al posto della precedente funzione si usa la funzione di partizione inversa, definita dalla relazione

$$W(\tau, n) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N r_i(n)^{-\tau} \propto n^{1-q}, \quad (2.8.4)$$

ove $r_i(n)$ è il raggio della più piccola sfera centrata sull' i -esimo punto, racchiudente n vicini. Una tale relazione non è applicabile nel caso in cui $q < 2$ a causa degli effetti dovuti alla discretezza del campione di cui si è precedentemente discusso. Mediante entrambe queste relazioni è possibile ricavare il valore di ciascun D_q dal campione.

Capitolo 3

Metodi statistici per l'individuazione dei filamenti

3.1 Il minimal spanning tree (MST)

Uno dei principali metodi impiegati per quantificare le proprietà geometriche della struttura su grande scala della distribuzione delle galassie è il *minimal spanning tree* (MST). I primi a condurre un'indagine sulla affidabilità con la quale l'MST è in grado di svolgere il detto compito e sulla consistenza dei risultati delle statistiche ad esso applicate furono Barrow, Bhavar e Sonoda (1985). Molto semplicemente il metodo consiste nell'unire fra loro tutti i punti di una distribuzione mediante segmenti che non formano mai anelli richiusi su se stessi e scelti in modo tale che la somma delle loro lunghezze risulti essere quella minima. Il risultato finale, per certi aspetti, è molto simile alle figure delle costellazioni riportate sugli atlanti celesti. Infatti l'algoritmo usato per costruire l'MST si comporta quasi come la mente umana, la quale ha l'istintiva tendenza a congiungere fra loro punti vicini con segmenti dandoci l'impressione che essi siano allineati lungo filamenti. Un altro esempio di illusione ottica di questo tipo sono i famosi "canali" di Marte osservati per la prima volta da Schiaparelli nel 1877.

Vediamo ora più in dettaglio le fasi in cui si articola l'MST. Supponiamo di disporre di una data distribuzione di n punti. Convenzionalmente l'intero insieme dei

punti o, nel caso di distribuzioni reali, delle galassie viene detto *grafo*. I punti appartenenti alla distribuzione vengono anche chiamati *nodi* (*nodes*) e i segmenti che li collegano fra loro a coppie *lati* (*edges*). Il numero di lati che si dipartono da ciascun nodo viene indicato come *ordine* del nodo. L'intero insieme dei lati è chiamato *sentiero* (*path*). Se il sentiero è chiuso su se stesso, quello che si ottiene è un circuito. Un grafo è detto *connesso* se esiste un sentiero che collega fra loro tutti i punti dell'insieme campione. Si indica con il nome di *albero* (*tree*) un sentiero connesso non contenente circuiti e se il detto albero collega tutti i punti viene detto *spanning tree*. Inoltre se fra gli $n(n-1)/2$ lati che collegano fra loro in tutti i modi possibili tutti gli n punti facenti parte della nostra distribuzione consideriamo solamente queglii ($n-1$) la cui somma delle lunghezze risulta essere minima, l'albero ottenuto viene chiamato *minimal spanning tree*. Esiste un unico insieme di $n-1$ segmenti la cui lunghezza totale è minima, per cui siamo certi che l'MST è definito in maniera univoca per una data distribuzione. Infine va ricordato che con *k-branch* vengono indicati tutti i *rami* (*branches*), formati da k lati, che connettono un nodo di ordine 1 con uno di ordine maggiore a 2, assieme a tutti quelli intermedi di ordine 2.

Una volta costruito l'MST sulla distribuzione di punti usata, su di esso vengono eseguite due operazioni di "sfoltitura" dei rami al fine di rendere più evidenti le strutture principali della distribuzione. Esse sono la *potatura* (*pruning*), il cui effetto è quello di eliminare tutti i k -branch più corti di un dato livello p , $k \leq p$, e la *separazione* (*separating*), attraverso la quale vengono tagliati tutti i lati con lunghezza fisica maggiore di una prestabilita lunghezza di soglia l_s . Mediante il *pruning* si escludono dall'albero tutti quei rametti che si dipartono dai rami principali al fine di rendere la forma di quest'ultimi meglio definita. La funzione del *separating*, invece, è quella di rimuovere dall'albero tutti quei lati che connettono sottostrutture fra loro distinte. Il metodo usato per stabilire se due punti non appartengono al medesimo ramo è quello di verificare se essi distano fra loro più di l_s . Un semplice esempio di come da una distribuzione di oggetti, a), una volta costruito l'MST, b), mediante il *pruning*, c), e il *separating*, d), si ottengano le strutture principali è dato dalla figura (3.1). Una volta compiute tutte queste operazioni il risultato finale è una serie di bracci disgiunti sui quali in seguito verranno condotte tutta una serie di indagini

quantitative.

Come già accennato, i primi ad applicare l'MST allo studio della struttura su grande scala dell'universo sono stati Barrow, Bhavsar e Sonoda (1985). In quell'articolo hanno cercato di verificare quale era l'efficienza con cui tale metodo riesce a rilevare le strutture, precedentemente individuate visivamente, presenti all'interno di due campioni di galassie, uno bidimensionale (un sottoinsieme del catalogo di Zwicky delle galassie brillanti contenente 1091 oggetti situati nell'emisfero celeste nord), l'altro tridimensionale (riunente 489 galassie osservabili nell'emisfero nord appartenenti al catalogo CfA). Lo stesso tipo di indagine è stata condotta su distribuzioni poissoniane di punti condividenti con i campioni bidimensionali e tridimensionali reali precedentemente definiti caratteristiche quali volume occupato, numero di oggetti e medesimo grado di correlazione fra i punti. Essi hanno analizzato il comportamento della fun-

Figura 3.1: Costruzione e riduzione dell'MST

zione di distribuzione $F(l)$, che rappresenta il numero di lati appartenenti all'MST di lunghezza l , e di quella $R(l)$, che rappresenta il rapporto tra il numero di lati di lunghezza l inclusi nell'MST e quello di tutti i possibili segmenti, sempre di lunghezza l , che connettono a due a due gli oggetti dell'intero campione, in funzione di $l/\langle l \rangle$, ove

$\langle l \rangle$ è la lunghezza media dei lati dell'MST. La funzione $R(l)$ fornisce una stima quantitativa della differenza statistica fra le informazioni sul grado di correlazione fra i punti di una distribuzione ottenibili mediante la $F(l)$ e la funzione di correlazione angolare. Barrow et al. (1985) hanno pensato inoltre di confrontare fra loro la lunghezza fisica totale e la distanza fra le due estremità di ciascun filamento individuato al fine di indagare se la forma delle strutture rilevate era prevalentemente filiforme o compatta. Hanno concluso che a causa dell'esiguo numero di filamenti individuati all'interno dei due citati campioni, una tale indagine non consentiva loro di ottenere significativi risultati. Inoltre, al fine di verificare l'abilità con la quale l'MST individua strutture filiformi all'interno dei campioni studiati, hanno confrontato l'MST costruito su una distribuzione poissoniana di punti con quello realizzato sulla medesima distribuzione alla quale, però era stato aggiunto un filamento contenente 20 punti. Hanno notato che l'MST era rimasto identico a quello dell'originaria distribuzione casuale ad eccezione del filamento, ben identificabile, che vi era stato introdotto. Hanno affermato inoltre che perturbazioni quali traslazioni, rotazioni o dilatazioni agenti su un qualsiasi insieme di punti non influenzano la forma finale dell'albero costruito con l'MST. Hanno evidenziato infine il fatto che l'andamento delle funzioni $F(l)$ delle distribuzioni reali era notevolmente diverso da quello osservato per le analoghe funzioni relative agli insiemi poissoniani di confronto. Infatti, mentre le funzioni di distribuzione $F(l)$ dell'MST dei cataloghi random mostravano un andamento di tipo gaussiano con il massimo centrato in corrispondenza di $\langle l \rangle$, quelle degli MST dei cataloghi reali di galassie esibivano forme completamente differenti rispetto alle precedenti. Per quest'ultime, infatti, le $F(l)$ presentavano un eccesso di lati molto corti o molti lunghi rispetto alle $F(l)$ delle distribuzioni casuali. Gli autori infine hanno concluso che, a loro parere, mediante l'applicazione di tale metodo si possono ottenere buone stime quantitative del grado di connessione fra i punti di una distribuzione e che le strutture rilevate grosso modo corrispondevano a quelle identificabili visualmente.

Più recentemente Bhavsar e Ling (1988) hanno tentato di dimostrare che i filamenti rilevabili mediante l'uso dell'MST erano reali e non dovuti ad allineamenti casuali. La procedura seguita per condurre a termine la loro indagine può essere brevemente riassunta in questo modo. Hanno considerato un volume cubico all'interno del

quale sono distribuiti n punti. Hanno applicato su tale insieme di oggetti l'MST e, una volta separato e potato l'albero, hanno calcolato la lunghezza dei singoli rami e quella caratteristica di tutte le strutture individuate. In seguito hanno scomposto il loro cubo in tanti cubetti il cui spigolo era più piccolo della lunghezza caratteristica precedentemente definita. Hanno smontato e rimontato a caso i cubetti così costruiti e hanno analizzato le strutture a questo punto osservabili. Qualora, reiterando numerose volte la procedura sopra descritta, non venissero più osservate strutture con lunghezza caratteristica simile a quella inizialmente ricavata, si può affermare che gli allineamenti osservati non sono casuali ma tracciano strutture reali.

Il catalogo di oggetti sul quale hanno condotto la loro ricerca era un sottocampione del catalogo CfA, contenente solo gli oggetti le cui coordinate astronomiche soddisfacevano alle condizioni $b^{II} > 40^\circ$ e $\delta > 0$, ove b^{II} e δ sono rispettivamente la declinazione galattica ed equatoriale. All'interno di questa regione cercarono di inscrivere un cubo dalle dimensioni più grandi possibili. Il volume così delimitato conteneva 214 galassie. Hanno analizzato tale campione di galassie mediante la funzione di correlazione a due punti, trovando che essa era ben approssimata da una legge di potenza con pendenza $\gamma = -1.8$. A questo punto hanno realizzato una simulazione di 214 punti distribuiti in modo da formare strutture lunghe e filiformi, per la quale la correlazione fra i punti fosse la medesima osservata per il campione reale, e occupante un identico volume. Una volta eseguite le operazioni di *pruning* e *separating* sull'MST della distribuzione di punti così realizzata, hanno misurato la lunghezza complessiva e la distanza da un estremo all'altro di ciascuno dei filamenti trovati. Dopo di che hanno scomposto il volume cubico in tanti volumetti, più piccoli della lunghezza caratteristica delle strutture precedentemente individuate, per poi ricomporlo e su di esso ripetere la procedura di identificazione dei filamenti. Come essi presumevano, l'operazione di permutazione dei cubetti aveva completamente distrutto tutti i filamenti precedentemente individuati e l'ordine di grandezza della lunghezza caratteristica delle strutture ora rilevabili era minore di quella inizialmente misurata. Lavorando su un maggiore numero di punti prevedevano che il processo di rimescolamento descritto portasse ad una completa distruzione di tutte le strutture filiformi osservate nel campione non rimaneggiato. Hanno confrontato i precedenti risultati con quelli ottenuti ana-

lizzando il sottocampione del catalogo CfA, precedentemente definito, mediante tale procedura. Hanno osservato che, dopo il processo di rimescolamento dei volumetti, le strutture individuate avevano estensioni, come ordine di grandezza, nettamente inferiori a quelle dei filamenti incontrati nella distribuzione originale. Un tale risultato pare confermare, secondo le loro aspettative, che i filamenti osservati all'interno del loro campione di galassie erano effettivamente strutture reali. Hanno concluso quindi, in accordo con quanto già affermato da Barrow et al. (1985), che l'MST è un algoritmo in grado di individuare con un buon grado di affidabilità tali strutture.

In un ancor più recente lavoro Plionis, Valdarnini e Jing (1992), nell'intento di studiare l'eventuale presenza di strutture su grande scala in sottocampioni di ammassi di galassie estratti dai cataloghi Abell e ACO, hanno impiegato più di un metodo di individuazione di filamenti, fra i quali l'MST. Plionis et al., come Barrow et al. anni prima, hanno analizzato l'andamento della funzione di distribuzione $F(l)$ dei campioni di ammassi di galassie a loro disposizione e la hanno confrontata con quelle osservate per varie distribuzioni casuali. I risultati ottenuti attraverso questa indagine statistica sostanzialmente confermavano le conclusioni a cui erano giunti Barrow et al. (1985) riguardo alla provata capacità dell'MST di operare una discriminazione fra differenti modelli cosmologici caratterizzati dalla medesima funzione di correlazione a due punti intrinseca. Qualche anno più tardi Plionis e Frenk (1991), in base ai risultati dei loro studi, hanno concluso che utilizzando l'MST su campioni con un notevole numero di oggetti, esso sembrerebbe essere un indicatore molto sensibile delle differenze statistiche presenti in simulazioni N-body di modelli con spettro di potenza di diverso indice spettrale.

A differenza dei loro predecessori hanno analizzato anche quali erano i valori assunti dalla quantità R_L , definita come il rapporto tra la distanza fra le due estremità di un ramo e la lunghezza totale dello stesso. Dalla loro analisi è emerso che, contrariamente a quanto osservato nelle distribuzioni poissoniane, i campioni reali di ammassi di galassie presentavano una maggior ricchezza di strutture su grande scala. A seguito di ciò sono giunti alla conclusione che la differenza rilevata non sarebbe da imputare ad una accentuata mancanza di clustering delle simulazioni ma potrebbe essere dovuta al fatto che l'implicita statistica impiegata per generare le distribuzioni

di controllo differisce da quella propria del campione reale.

Oltre a ciò hanno indirizzato la loro attenzione anche sull'andamento della funzione di distribuzione della lunghezza dei rami individuati dopo le operazioni di *pruning* e di *separating*. Anche tale funzione è stata confrontata con quelle analoghe costruite a partire dalle distribuzioni simulate. I risultati a cui sono pervenuti mostravano che per lunghezze di soglia $l_s \leq 0.8\langle l \rangle$ si osserva un eccesso di filamenti molto lunghi all'interno dei campioni reali analizzati rispetto a quelli simulati. Per valori di l_s molto maggiori le varie funzioni di distribuzione rimostravano, però, un andamento praticamente identico.

3.2 Percolazione

Un diverso metodo di indagine a cui si è ricorsi per analizzare le proprietà delle strutture su grande scala dell'universo è la percolazione. Il primo a suggerirne l'impiego per un tale tipo di analisi fu Zeldovich (1982). Tale metodo consiste essenzialmente in questo. Consideriamo un campione dell'universo racchiuso in un volume cubico di lato L , contenente $N \gg 1$ punti. In corrispondenza di ciascuno di essi centriamo una sfera di diametro $d = b\bar{l}$, ove $\bar{l} = L/N^{1/3}$ è la distanza interparticellare media. Tutti gli altri punti racchiusi in tale sfera sono detti "amici" del punto centrale. Quando la sfera (o intorno), circondante un punto si sovrappone ad altri intorni si dice che tutti i punti in esse contenuti sono diventati "amici". Si ripete la procedura per tutti i punti della distribuzione. Alla fine essi dovranno appartenere ad uno dei seguenti tipi di strutture: punti isolati o *cluster*. Se il valore di b è piccolo, la maggior parte di essi risulterà isolata, al contrario se b è grande la maggior parte dei punti risulterà appartenere a strutture connesse, i clusters appunto. Quando all'interno del cubo si forma un cluster che copre tutta la distanza che intercorre fra due sue opposte facce, si dice che il sistema *percola* e il valore che b assume in corrispondenza dell'istante in cui ha luogo un tale fenomeno, è detto *parametro di percolazione*, b_c . Per una distribuzione uniforme di punti si ha che $b_c = 1$. È stato calcolato che per una distribuzione casuale di punti $b_c = 0.86$. Nel caso in cui i punti si distribuiscono su piani di spessore $h \ll L$, separati l'uno dall'altro da una distanza λ , il parametro di

percolazione assume il seguente valore:

$$b_c = \left(\frac{h}{\lambda}\right)^{1/3} < 1.$$

Analogamente per punti distribuiti lungo filamenti con sezione quadrata di lato $h \ll L$ distanti fra loro λ , si ha

$$b_c = \left(\frac{h}{\lambda}\right)^{2/3} \ll 1.$$

Nel caso invece i punti siano raggruppati in cubetti di lato $h \ll L$ separati da una distanza pari a λ , si ha che $d = b_c \bar{l} = \lambda - h$, da cui si ricava

$$b_c = \frac{\lambda - h}{\bar{l}} \simeq \frac{\lambda}{\bar{l}} > 1.$$

Confrontando fra loro i valori di b_c sopra ricavati si nota che insiemi di punti allineati secondo piani o filamenti percolano più velocemente di una distribuzione uniforme. Per punti raccolti in gruppi isolati vale l'esatto contrario. Sin qui si è descritto il metodo di percolazione applicato ad un insieme discreto di punti. Un ulteriore esempio di come può venire applicata percolazione è dato dalla “*site percolation*”. In questo caso si studia la percolazione di un sistema su una griglia quadrata o cubica. Il metodo si articola nelle seguenti fasi. Si sovrappone ad una distribuzione una griglia quadrata, cubica se il campione è tridimensionale, e si contano il numero di punti presenti in ciascuna celletta della griglia. Si stabilisce qual è il numero minimo di punti che una celletta deve contenere per essere considerata piena. Al variare di tale parametro si vede quando le celle piene vicine formano un insieme connesso, detto *cluster infinito*, che si estende da capo all'altro della griglia. Per convenzione due cellette dello stesso tipo, piene o vuote, vengono considerate vicine quando condividono almeno un lato.

Dominik e Shandarin (1992) hanno studiato come percolano simulazioni N-body a due dimensioni applicando il metodo della “*site percolation*”. I parametri su cui hanno soffermato la loro indagine erano la densità di soglia ϱ_c , in corrispondenza della quale le cellette piene formano il cluster infinito; l'area totale occupata dal cluster infinito a_c , data dalla relazione $a_c = (a_{cx} + a_{cy})/2$, ove a_{cx} e a_{cy} sono il numero totale di cellette con densità superiore a quella di soglia lungo gli assi cartesiani x , y ; la massa

totale contenuta nelle cellette costituenti il cluster infinito $M_c = (M_{cx} + M_{cy})/2$ ove M_{cx} ed M_{cy} sono la massa contenuta nelle già citate cellette a_{cx} e a_{cy} . I detti autori hanno confrontato simulazioni di modelli con spettri iniziali delle perturbazioni dati da leggi di potenza del tipo

$$P_0(k) = k^n$$

e

$$P_0(k) = \begin{cases} k^n, & \text{per } 1 \leq k \leq k_c \\ 0, & \text{per } k \geq k_c \end{cases}$$

con indici spettrali pari a $n = 2, 0$ e -2 , rispettivamente, con distribuzioni gaussiane. I valori assunti dal parametro di cutoff k_c sono $k_c = 4, 32$ e 256 , ove $k = 1$ corrisponde al lato dell'area quadrata campione e $k = 256$ è la frequenza di Nyquist delle simulazioni. Le conclusioni che Dominik e Shandarin hanno tratto in base ai risultati ottenuti si riassumono nelle seguenti considerazioni. Innanzitutto la percolazione, attraverso i parametri qualitativi considerati, sembrava in grado di giustificare la presenza delle strutture filiformi, precedentemente individuate visivamente. Hanno constatato che i modelli percolavano più facilmente quando la materia, il cui comportamento viene descritto attraverso il campo di densità ϱ , condensava lungo filamenti. Inoltre hanno evidenziato che se il sopracitato campo di densità viene convoluto con un filtro gaussiano, la distribuzione campione percola più o meno facilmente a seconda della forma delle strutture evolute al loro interno. Se per esempio stiamo considerando una distribuzione in cui i punti si addensano in gruppi isolati, ma i detti gruppi, a loro volta, risultano essere allineati lungo filamenti, il sistema percola molto più facilmente quando la lunghezza di filtraggio è grande rispetto a quando viene scelta piccola.

Contemporaneamente in un'altra pubblicazione Klypin e Shandarin (1992) hanno studiato l'applicazione del metodo della percolazione a distribuzioni di massa e di galassie in simulazioni N-body di modelli tridimensionali di universi dominati dagli scenari CDM e CHDM e con spettro iniziale delle perturbazioni descritto da una legge di potenza con pendenza $n = -1$ in universi di Einstein de-Sitter, $\Omega = 1$. Per tutti i modelli sopra citati sono stati studiati i valori di soglia della percolazione di distribuzione continue e discrete di massa su una griglia tridimensionale di dimensioni 256^3 . Nel sopra citato articolo le quantità adottate per studiare il fenomeno della

percolazione di un sistema erano: la frazione di volume occupata dal cluster più grande, μ_∞ , data dalla relazione

$$\mu_\infty = v_{max}/N_t,$$

e la media pesata delle dimensioni di tutti i cluster ad esclusione di quello di estensione maggiore, μ^2

$$\mu^2 = \frac{\sum_v v^2 \cdot n(v)}{N_t^{2/3} \sum_v n(v)}.$$

Nelle precedenti relazioni $N_t = N_x \cdot N_y \cdot N_z$ è il numero totale cellette della griglia ed N_i quello parziale lungo i tre assi coordinati e v_{max} è il volume occupato dal cluster infinito. Shandarin ha utilizzato inoltre la funzione di molteplicità $n(v)$ definita come il numero di cluster di dimensione v , che è una funzione dipendente dal “filling factor”, che è la frazione di cellette piene rispetto al loro numero totale.

I risultati preliminari della loro indagine confermavano la bontà della scelta di μ_∞ e di μ^2 quali estimatori della soglia di percolazione di una distribuzione rispetto a quelli inizialmente considerati, cioè la formazione di un cluster coprente l'intera estensione della griglia ed il diametro di quest'ultimo. I due parametri μ_∞ e μ^2 apparirebbero essere meno sensibili ad effetti al bordo del volume campione, quali fluttuazioni statistiche o incompletezza dei cataloghi analizzati. Le stime ricavate dei valori critici del filling factor all'istante della percolazione erano rispettivamente $p_c = 0.023 \pm 0.005$ per il modello CHDM, $p_c = 0.044 \pm 0.005$ per il modello CDM e $p_c = 0.073 \pm 0.005$ per il modello con spettro iniziale delle perturbazioni con indice $n = -1$. Tali valori risultano essere inferiori al valore di soglia di percolazione ricavato per simulazioni con spettro delle perturbazioni iniziale di tipo gaussiano, che è $p_c = 0.16$. Ciò sta ad indicare che i modelli CDM, CHDM e spettro con legge di potenza con $n = -1$ percolano più velocemente dei campi gaussiani di confronto. In base ai dati così ottenuti essi hanno ritenuto di poter affermare con una certa sicurezza che, per quanto concernevano le distribuzioni continue di massa, le statistiche applicate alla percolazione erano in grado di operare una distinzione fra i modelli considerati.

Sempre negli stessi anni Plionis et al. (1992) hanno utilizzato la percolazione per individuare e analizzare le strutture su grande scala nei cataloghi di ammassi di galassie Abell e ACO. Le statistiche su cui hanno concentrato le loro analisi erano

la funzione di molteplicità, la percentuale di ammassi presenti all'interno dei superammassi e il loro schiacciamento, quantità in tutti e tre i casi mappate in funzione del raggio di percolazione, b . Hanno definito superammasso ogni insieme costituito da almeno nove ammassi. Limitatamente alla frazione di oggetti presente in ciascun superammasso, il confronto delle statistiche ricavate dai dati ottenuti dai campioni reali e quelli dalle simulazioni non mostravano significative deviazioni dell'una rispetto all'altra, sia per i sottocampioni considerati nel catalogo Abell che per il catalogo ACO. Hanno annotato inoltre che tale parametro indicava come modello che meglio riproduceva l'andamento dei dati del campione reale quello stesso trovato studiando l'andamento della funzione $F(l)$ per l'MST. Anche nel caso delle funzioni di molteplicità l'andamento per i dati del campione reale e quelli delle simulazioni non presentavano significative differenze dell'uno rispetto all'altro.

L'impiego del parametro di appiattimento dei clusters quale statistica era dovuto alla convinzione, espressa in alcuni lavori precedenti da altri ricercatori, che la non sfericità degli ammassi di oggetti, identificati attraverso il metodo della percolazione o algoritmi simili, è una prova che i detti cluster sono strutture reali (West 1989b). Come Plionis et al. (1992) riportano, però, una simile asserzione è basata, esclusivamente, sul confronto fra i valori di appiattimento osservati in campioni reali con quelli previsti per una distribuzione poissoniana di punti. A loro avviso il modo corretto per stabilire il livello di significatività delle strutture osservate è confrontare i campioni reali con simulazioni aventi il medesimo grado di correlazione fra gli oggetti e la medesima funzione di selezione. Hanno calcolato, dunque, il tensore d'inerzia diagonalizzato definito nel seguente modo

$$I_{ij} = \sum_{k=1}^N (x_i x_j)_k w_k,$$

ove N è il numero di oggetti appartenenti a ciascun superammasso individuato, $i, j = 1, 2, 3$ e $x_{i,k}$ e $x_{j,k}$ sono le coordinate cartesiane dell' i -esimo oggetto rispetto al centro di massa del k -esimo cluster. Le quantità w_k sono il peso con cui ciascun superammasso entra nella sopra citata somma. Plionis et al. hanno adottato i seguenti metodi per pesare i termini della sommatoria:

- a) $w_i = 1$ uguale peso per tutti i termini;

- b) $w_i = r^{-2}$ l'inverso della distanza di ciascun cluster dal centro del superammasso a cui appartiene;
- c) $w_i = N_g$ numero di galassie appartenenti a ciascun cluster.

Indicando con $a_1^2 > a_2^2 > a_3^2$ i tre autovalori del tensore d'inerzia, sono state definite le tre quantità: $\lambda_1 = 1/a_3^2$, $\lambda_2 = 1/a_2^2$ e $\lambda_3 = 1/a_1^2$. Dette espressioni sono servite per costruire le equazioni definenti i due seguenti parametri di forma:

$$e = \frac{\lambda_1 - \lambda_3}{2(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)} \quad (3.2.1a)$$

$$p = \frac{\lambda_1 - 2\lambda_2 + \lambda_3}{2(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)}, \quad (3.2.1b)$$

ove e e p misurano rispettivamente l'ellitticità nel piano $\lambda_1 - \lambda_3$ e la prolatezza e lo schiacciamento dell'ellissoide che più si avvicina, come forma, a quella della struttura da studiare. Se $0 \geq p \geq -e$ allora l'ellissoide assume una forma prolata, al contrario se invece si ha $e \geq p \geq 0$ allora avrà una forma oblata. Se in particolare p assume i due valori $p = -e$ e $p = e$ l'ellissoide avrebbe, rispettivamente, la forma di uno sferoide prolato e oblato. In seguito Plionis et al. hanno misurato questi due parametri per tutti i superammassi trovati all'interno di distribuzioni dalle caratteristiche simili a quelli dei campioni reali. I valori trovati sono stati poi confrontati con quelli ottenuti per i superammassi individuati nei cataloghi reali analizzati. Una tale procedura è stata eseguita adottando due diversi raggi di percolazione e due diversi tipi di peso per ciascuna distribuzione. A questo punto Plionis et al. (1992) hanno tratto le seguenti conclusioni. Gli ammassi incontrati nelle simulazioni erano triassiali e mostravano di avere una forma prevalentemente oblata in circa l'80% dei casi. A loro avviso, tale risultato è pienamente in accordo con quanto era lecito attendersi per distribuzioni con proprietà di clustering simili a quelle dei campioni reali studiati. Per quanto concerne gli ammassi individuati nei campioni reali, sebbene anch'essi mostrassero chiaramente di essere strutture triassiali, in molti casi i loro valori di e e p giacevano all'esterno della zona in cui si collocavano le medesime quantità calcolate per le distribuzioni simulate. Poichè lo stesso comportamento veniva osservato per ognuno dei campioni di confronto considerati i Plionis et al. conclusero che questa era la prova che i superammassi osservati erano reali.

Ancora più recentemente Yess e Shandarin (1995) hanno impiegato la percolazione per dimostrare che la topologia detta a “network” è una caratteristica comune a tutte le distribuzioni di massa risultanti dall’evoluzione gravitazionale non lineare di fluttuazioni con spettro primordiale gaussiano. I detti autori soffermarono la loro attenzione su cinque modelli tridimensionali con legge di potenza $P(k) \propto k^n$ con $n = +3, +1, 0, -1, -2$ in universi con $\Omega = 1$. Inoltre hanno studiato le caratteristiche dei sistemi percolanti a cinque differenti stadi di evoluzione non lineare. I parametri scelti per quantificare le proprietà delle strutture percolanti sono stati il volume occupato dall’ammasso o dalla regione vuota più grande in funzione del filling factor, ed il numero totale di “cluster” o vuoti, sempre in funzione del filling factor.

Come ben noto, una distribuzione gaussiana non mostra alcuna differenza statistica fra regioni sovradense e regioni sottodense, contrariamente a quanto avviene per un modello non lineare. Il fatto che quest’ultimo percoli con maggiore o minore facilità rispetto ad una distribuzione gaussiana è ritenuto un buon indicatore della non linearità dei processi di instabilità gravitazionale in base ai quali un dato modello si è evoluto. Una statistica che sia in grado di evidenziare una tale differenza risulta molto utile poichè le distribuzioni gaussiane vengono largamente usate come pietre di paragone per descrivere la topologia delle strutture su grande scala incontrate nei cataloghi. Sia il volume dell’ammasso più grande che il numero totale di ammassi si sono dimostrate statistiche sensibili alla non gaussianità dei modelli studiati. Esse inoltre hanno mostrato che tutti i modelli considerati percolano meglio delle distribuzioni gaussiane di confronto indicando inoltre che la loro topologia assumeva la forma tipica detta a “network”. Le distribuzioni apparivano assumere più marcatamente tale forma man mano che l’indice spettrale diminuiva. Yess e Shandarin hanno riportato anche il fatto che, come si aspettavano, per le regioni vuote il comportamento era esattamente l’opposto.

Concludiamo citando un articolo di Bhavsar e Splinter (1996), il cui intento era di verificare se dato un campione di punti l’MST costruito su di esso fornisce la medesima stima sulla soglia di percolazione ricavabile per esso con il metodo dell’analisi della percolazione. Al fine di verificare una tale affermazione hanno articolato la loro indagine nelle seguenti fasi. Per distribuzione poissoniana di 32^3 punti hanno rica-

vato il valore del raggio di percolazione l_{perc} . In altre parole nel momento in cui la distribuzione percola la distanza minima che intercorre tra due punti appartenenti a due cluster distinti è pari a $2 \times l_{perc}$. A questo punto sulla stessa distribuzione hanno costruito l'MST che in seguito è stato separato e potato adottando come lunghezza di separazione $l_s = 2 \times l_{perc}$. Hanno notato che il più grosso dei rami così trovati mostrava il medesimo comportamento dell'ammasso percolante trovato in precedenza, cioè si estendeva attraverso tutto il volume occupato dalla distribuzione. Hanno osservato inoltre che anche impiegando lunghezza di separazione via via sempre più piccole di $2 \times l_{perc}$ le strutture identificate con l'MST erano ancora simili quelle individuate con la percolazione. In figura (3.2) sono riportati in ascissa i valori della lunghezza di separazione utilizzati, rapportati alla lunghezza interparticellare media $l/n^{-1/3}$, ove l è la lunghezza del lato del volume campione e n la densità dei punti, e in ordinata le dimensioni del cluster percolante calcolate per mezzo della percolazione e dell'MST. Per quantificare la differenza esistente fra le due curve riportate in figura (3.2) hanno poi calcolato lo scarto medio nel seguente modo

$$L_1 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |l_i^{perc} - l_i^{MST}|,$$

ove l_i^{perc} e l_i^{MST} sono rispettivamente la lunghezza dell'ammasso percolante e quella del più grosso ammasso identificato con l'MST ed N è il numero di dati riportati in figura (3.2). Il valore di L_1 ricavato era dell'ordine di 1.2×10^{-9} . I detti autori hanno verificato inoltre che il tempo di CPU necessario per ricavare i dati riportati in figura (3.2) ottenuti con il metodo della percolazione è dieci volte superiore a quello necessario all'MST per completare il medesimo lavoro.

Bhavsar e Splinter inoltre hanno notato che la massa totale racchiusa all'interno della struttura percolante sembra essere un parametro più robusto dell'estensione lineare della stessa quale indicatore dell'istante d'inizio della percolazione. A tal proposito è interessante ricordare il metodo proposto da Eisenstein, Loeb e Turner (1996) per stimare la massa dinamica delle strutture su grande scala individuate nei cataloghi di redshift. L'intero metodo si basa sulla considerazione che la massa per unità di lunghezza di un filamento isoterma dipende solo dalla sua dispersione della velocità trasversale. A detta degli autori tale metodo risulta essere molto promettente

Figura 3.2: Dimensioni dell'ammasso percolante calcolato con il metodo della percolazione (quadrati) e con l'MST(cerchi)

data la notevole somiglianza fra le stime del valore della massa per unità di lunghezza ottenute attraverso la dispersione della velocità e quelle ricavate da simulazioni N-body nello spazio reale. Tuttavia resta ancora da calibrare e da verificare la robustezza di tale metodo nello spazio dei redshift.

3.3 Statistica del quadrupolo

Vishniac (1986) propose una statistica in grado di misurare il grado di filamentarietà di una distribuzione bidimensionale in funzione di un parametro di scala, R . Fra le condizioni che tale statistica doveva soddisfare Vishniac annoverò il fatto che i risultati da essa ottenibili fossero facilmente predicibili per campioni di dati che sono sovrapposizioni di distribuzioni di oggetti dalle proprietà statistiche note ma non poste alla medesima distanza dall'osservatore. Una tale assunzione è molto importante in quanto un metodo soddisfacente tale condizione dovrebbe consentire di confrontare campioni di galassie poste a varie distanze per verificare se la struttura individuata è quella intrinseca della distribuzione o è il risultato di effetti di assorbimento o selezione. Il metodo proposto da Vishniac, per sommi capi, si articola nelle seguenti fasi. Per prima cosa si considera un oggetto a caso appartenente al campione e se ne trovano i vicini, cioè gli oggetti distanti dal precedente meno di un dato valore R . Supponiamo che il numero di vicini sia N . A questo punto si possono definire i

momenti, rispetto all'oggetto scelto inizialmente, dell'insieme di punti contenuti nella sfera di raggio R nel seguente modo

$$M^{ij\dots k} = \frac{1}{N} \sum_{s=1}^N x^i(s)x^j(s)\cdots x^k(s),$$

ove $x^i(s)x^j(s)\cdots x^k(s)$ sono le componenti dei vettori posizione. Essi consentono di definire la statistica come

$$S = \frac{2M^{ij}(M^{ij} - M^i M^j) - M^{ii}(M^{jj} - M^j M^j)}{(M^{ii})^2}, \quad (3.3.1)$$

sulla quale, come usuale, è sottintesa una sommatoria su indici ripetuti. Ripetendo una tale operazione per tutti gli oggetti si può calcolare il valor medio $\langle S \rangle$ di tale statistica su tutto il campione che consente di costruire la relazione di scala $\langle S \rangle / \langle S_p \rangle - 1$ che fornisce l'eccesso di filamentarietà di un insieme di punti rispetto a una distribuzione poissoniana su una data scala. Il termine $\langle S_p \rangle$ è appunto il valore di aspettazione di $\langle S \rangle$ per la distribuzione casuale.

In seguito Fry (1986) ha ricavato le relazioni analitiche esistenti fra la statistica di Vishniac e le funzioni di correlazione di basso ordine. In particolare ha ottenuto l'espressione di S_p per una distribuzione poissoniana tridimensionale di oggetti:

$$S_p = \frac{50}{21N} \left[1 + \frac{25}{21(N-1)} \right]^{-1},$$

nella quale con N viene indicato il numero di oggetti, appartenenti ad un campione poissoniano, che ci si aspetta di trovare entro una sfera di raggio R . I risultati delle indagini condotte sulla affidabilità di questa statistica lo hanno condotto ad affermare che a suo avviso il metodo pareva in grado di rilevare le strutture immerse nella distribuzione. In seguito Fry ha confrontato il valore della quantità $\langle S \rangle / \langle S_p \rangle - 1 = \mathcal{B}\vartheta^{3-\gamma}$, ove γ è l'esponente che compare nella relazione $\omega(\vartheta) = A\vartheta^{-\gamma}$, e \mathcal{B} è una costante di normalizzazione, con quello calcolato da Vishniac trovando un buon accordo fra i due valori. Tuttavia Fry ha riscontrato una lieve ma significativa differenza tra il valore di $\langle S \rangle / \langle S_p \rangle - 1$ ottenuto applicando le equazioni dei momenti approssimate alle sole funzioni di correlazione di basso ordine e quello ricavato usando le analoghe relazioni che tengono conto anche del contributo alla correlazione totale

dovuto ai termini di ordine superiore. Una tale differenza era più evidente quando il valore di R era piccolo e, secondo Fry, non del tutto chiaramente spiegabile.

Più recentemente Luo e Vishniac (1994) hanno proposto una generalizzazione della statistica originariamente applicata da Vishniac allo studio delle strutture su grande scala dell'universo introducendo le due statistiche di forma S_f ed S_l per quantificare la presenza di filamenti o pancake, rispettivamente, in una distribuzione tridimensionale di punti. Hanno definito le due dette statistiche nel seguente modo:

$$\begin{aligned}
 S_f &= \frac{1}{2Tr(M)^3} (6Tr(M)(M_{ij} - M_i M_j)(M_{ij} - M_i M_j) - \\
 &\quad - 7Tr(M)(Tr(M) - M_i M_i)^2 - \\
 &\quad - 18M_{ij}(M_{jk} - M_j M_k)(M_{ik} - M_i M_k) + \\
 &\quad + 21(Tr(M) - M_k M_k)M_{ij}(M_{ij} - M_i M_j)) , \\
 S_l &= \frac{1}{2Tr(M)^3} (-2Tr(M)(M_{ij} - M_i M_j)(M_{ij} - M_i M_j) + \\
 &\quad + Tr(M)(Tr(M) - M_i M_i)^2 + \\
 &\quad + 6M_{ij}(M_{jk} - M_j M_k)(M_{ik} - M_i M_k) - \\
 &\quad - 3(Tr(M) - M_k M_k)M_{ij}(M_{ij} - M_i M_j)) ,
 \end{aligned}$$

ove i momenti primi e secondi della distribuzione, M_i ed M_{ij} , sono definiti mediante le relazioni

$$\begin{aligned}
 M_i &\equiv \frac{1}{N} \sum_l x_i(l) W(\vec{x}(l)) \\
 M_{ij} &\equiv \frac{1}{N} \sum_l x_i(l) x_j(l) W(\vec{x}(l)),
 \end{aligned}$$

dove con $Tr(M)$ viene indicata la traccia della matrice M , $N = \sum_l W(\vec{x}(l))$ e $W(\vec{x}(l))$ è una funzione finestra centrata sul generico punto $\vec{x}(l)$. La differenza fra S_f ed S_l è una statistica sensibile alle strutture a forma di piano. Per verificare la sensibilità con la quale le sopra citate riescono a rilevare delle strutture presenti all'interno di una distribuzione discreta di punti, i due autori per prima cosa le hanno applicate ad un insieme sferoidale di punti dalle ben note caratteristiche geometriche. Essi hanno notato che al variare dei rapporti fra gli assi dello sferoide i valori variavano secondo le loro previsioni. Inoltre hanno osservato che i risultati ottenuti non dipendevano dal numero di punti costituenti la struttura di prova. In seguito hanno ripetuto la stessa

indagine ma con un insieme sferoidale di punti immerso in una distribuzione casuale di punti di sottofondo. I risultati delle prove così effettuate mostravano ancora una volta un buon accordo con i valori previsti. Infine hanno messo alla prova il loro metodo su una distribuzione di punti maggiormente realistica. Essi hanno distribuito a caso entro un volume prestabilito un certo numero di pancake di varia forma e orientamento, anche in questo caso immersi in una distribuzione casuale di punti. Nuovamente hanno constatato una corrispondenza fra i valori previsti e quelli osservati. Hanno concluso quindi che, a loro parere, le statistiche impiegate sono in grado di rivelare con accuratezza la morfologia delle strutture di una distribuzione di punti. Gli autori hanno osservato inoltre che il metodo di indagine delle strutture su grande scala da loro proposto può venire usato con buoni risultati sia per rilevare le differenze statistiche fra le simulazioni e i campioni reali, sia per individuare le strutture e fornire una stima quantitativa della numerosità dei filamenti e dei pancake di un campione di galassie.

3.4 Funzioni di struttura

Quale metodo per quantificare la forma delle strutture su grande scala rilevabili all'interno di una distribuzione tridimensionale di oggetti, Babul e Starkman (1992) proposero le funzioni di struttura. Esse vennero chiamate S_1 , S_2 ed S_3 e misurano, rispettivamente, quanto sia prolata, oblata e sferica/uniforme una distribuzione di punti in funzione di un fattore di scala. La procedura proposta per la derivazione delle dette funzioni può riassumersi nelle seguenti fasi. Si considera un particolare punto della distribuzione data e si cercano i suoi vicini. Quest'ultimi sono definiti come tutti quei punti contenuti entro una sfera di raggio R centrata sul punto precedentemente scelto. Si calcola poi il tensore d'inerzia rispetto al baricentro dell'insieme di punti contenuti nella sfera sopra indicata in base all'equazione

$$I_{ij}(R) = M_{ij}(R) - M_i(R)M_j(R),$$

ove M_i ed M_{ij} sono i momenti primo e secondo della distribuzione considerata definiti

mediante le relazioni

$${}_i(R) \equiv \frac{1}{N} \sum_{k, |r^{(k)}| \leq R} r_i^{(k)} \quad (3.4.1a)$$

$$M_{ij}(R) \equiv \frac{1}{N} \sum_{k, |r^{(k)}| \leq R} r_i^{(k)} r_j^{(k)}, \quad (3.4.1b)$$

ove gli indici i e j indicano le tre componenti dei vettori posizione e l'indice k è definito fra 1 ed N , con N numero totale di punti contenuti nel volume sferico definito precedentemente. Se le strutture studiate sono interamente racchiuse dalla sfera di raggio R , allora il tensore I_{ij} è indipendente dal punto rispetto a cui lo si calcola. Detti ora I_1 , I_2 ed I_3 i tre autovalori di I_{ij} , ordinati in ordine decrescente di grandezza, si costruiscono le due quantità $\mu = (I_2/I_1)^{1/2}$ e $\nu = (I_3/I_1)^{1/2}$. Si possono ora definire le funzioni di struttura in base alle equazioni

$$S_1 \equiv \sin \left[\frac{\pi}{2} (1 - \nu)^p \right], \quad S_2 \equiv \sin \left[\frac{\pi}{2} a(\mu, \nu) \right], \quad S_3 \equiv \sin \left(\frac{\pi}{2} \mu \right), \quad (3.4.2)$$

ove $p = 2.7$ e $a(\mu, \nu)$ è soluzione dell'equazione

$$\frac{\nu^2}{a^2} - \frac{\mu^2}{a^2(1 - \alpha a^{1/n} + \beta a^{2/n})} \equiv 1, \quad (3.4.3)$$

con $\alpha = 1.9$, $\beta = 0.9$ e $n = 3$.

Grazie all'impiego dei momenti d'inerzia siamo certi che i valori delle quantità S_i non dipendono dall'ordine di grandezza delle strutture, se esse sono interamente contenute entro il volume sferico di raggio R . Per cui per vedere come cambia la topologia delle strutture incontrate basta aumentare o ridurre la lunghezza di R e osservare come variano i valori delle S_i . Inoltre, poichè le distribuzioni reali di oggetti contengono al loro interno numerose strutture, di diversa forma e dimensione, oltre a punti non appartenenti a nessuna di esse, il valore delle quantità S_i ricavato a partire da un solo punto non è certamente rappresentativo dell'intera distribuzione. Pertanto si utilizza una media di più valori ottenuti a partire da un certo numero di punti presi a caso. Ciascuno dei detti valori va pesato per il numero di oggetti contenuti entro le sfere di raggio R centrate sui sopra indicati punti.

Al fine di verificare con che grado di accuratezza le funzioni di struttura riescono a riconoscere la forma della struttura su grande scala presente all'interno di una

distribuzione di oggetti, Babul e Starkman hanno applicato le S_i prima a insiemi di punti isolati di forma e dimensioni note. I risultati ottenuti corrispondevano a quelli che essi si aspettavano. Anche i risultati delle indagini condotte su insiemi di punti distribuiti su più strutture dalle differenti proprietà geometriche coincidevano con quelli da loro attesi. A questo punto hanno provato ad applicare le S_i alle strutture generate per mezzo di processi di clustering non gravitazionale a partire da un insieme gaussiano di fluttuazioni nel campo di densità, caratterizzato da uno spettro di potenza iniziale $P(k) \propto k^n$, con $n = 0, -1, -2$, in un universo di Einstein-de Sitter. Anche in questo caso le S_i parevano individuare con buona approssimazione la forma degli ammassi e dei filamenti che potevano esse individuati tramite l'indagine visuale delle simulazioni.

Alcuni anni più tardi Pearson e Coles (1994) hanno applicato le funzioni di struttura all'analisi della forma delle strutture identificate attraverso l'MST. Il metodo proposto riunisce così l'abilità di evidenziare strutture predominanti all'interno di un campione di oggetti dell'MST con la capacità di svelarne la forma propria delle funzioni di struttura, riducendo nel contempo la sensibilità di quest'ultime al rumore statistico. Gli autori hanno verificato l'efficienza del metodo da loro proposto quando applicato prima a distribuzioni poissoniane di punti e poi a strutture filiformi e sferoidali immerse in una distribuzione casuale. Poiché il loro intento non era quello di campionare un particolare tipo di struttura hanno deciso di non potare l'albero. Hanno deciso inoltre di studiare il comportamento delle S_i in funzione dei diversi valori l_s utilizzati per separare l'uno dall'altro i filamenti principali. I risultati ottenuti hanno mostrato che l'uso combinato dell'MST e delle funzioni di struttura sembrerebbe in grado di descrivere egregiamente la forma geometrica delle strutture individuate anche se queste sono immerse in una distribuzione casuale di punti di campo. Tale conclusione è in accordo con i risultati precedentemente ottenuti da Babul e Starkman. Hanno suggerito, inoltre, che a loro avviso il migliore metodo per studiare le strutture di una distribuzione con questo metodo consiste nel costruire l'MST e in seguito operare su di esso una separazione a diversi livelli di *separating*. In seguito vanno costruite la funzione di distribuzione del numero di strutture così individuate e quella dei valori di S_3 in funzione di l_s . Pearson e Coles, infine,

hanno provato ad applicare il loro metodo a distribuzioni di oggetti più realistiche di quelle precedentemente studiate da loro e che fossero anche in grado di metterlo a dura prova. Anche in questo caso, sebbene ritengano che i risultati non siano ancora conclusivi, il metodo sembra fornire validi risultati statistici consistenti.

L'idea di sfruttare i benefici derivanti dall'applicazione delle funzioni di struttura in congiunzione con altri metodi statistici è stata sfruttata anche da Sathyaprakash, Sahni e Shandarin (1996). Essi hanno studiato l'evoluzione della forma delle strutture isolate e quella delle regioni con densità superiori ad un dato valore di soglia in modelli cosmologici con spettro delle perturbazioni rappresentabile con legge di potenza con l'ausilio della percolazione e delle funzioni di struttura. È opinione degli autori che le S_i siano in grado di quantificare molto bene la morfologia delle strutture osservabili in una distribuzione e che inoltre forniscano risultati in linea con l'impressione visuale che se ne ha di essi.

I modelli su cui hanno sperimentato il loro metodo di indagine erano varie simulazioni N-body in tre dimensioni con spettro di potenza $P(k) \propto k^n$ ma nel citato articolo concentrarono la loro attenzione solo su quelle aventi come indice spettrale $n = -2, 0$. Per prima cosa hanno constatato che la percolazione nel modello con indice $n = -2$ ha luogo per valori del filling factor molto inferiori rispetto a quanto osservato per il modello con $n = 0$. Hanno imputato un tale comportamento al fatto che nel primo caso lo spettro delle perturbazioni è dotato di maggiore potenza su grande scala, per cui la percolazione delle strutture risulta facilitata. Al crescere della scala di non-linearità il filling factor decresce monotonicamente per entrambi i modelli considerati, indicando un aumento della coerenza delle strutture all'interno delle rispettive simulazioni. In base ai risultati ottenuti per tutti i modelli considerati sono giunti alla conclusione che il metodo della percolazione sia un sensibile indicatore della natura del collasso gravitazionale nei differenti scenari su cui è stato applicato. L'analisi dell'evoluzione della forma delle strutture mediante le funzioni di struttura ha mostrato che in entrambe le simulazioni inizialmente gli ammassi hanno forma prevalentemente sferica indipendentemente dalla loro massa. All'aumentare della scala di non-linearità prima le strutture tendono ad assumere una forma sempre più marcatamente filiforme. Hanno inoltre notato che gli ammassi di forma prolata

sono sempre numericamente maggiori a quelli di forma oblata per entrambi i modelli considerati a tutte le epoche.

3.5 Statistica degli allineamenti

Un tipo di statistica alternativa rispetto alle precedenti fu proposta da Kuhn e Uson (1982). L'algoritmo, molto banalmente, si articola nelle seguenti fasi. Si consideri una distribuzione bidimensionale di N punti fra i quali se ne sceglierà uno a caso come punto di partenza. Dopo di che si connette mediante un segmento (*passo*) quest'ultimo con il punto ad esso più vicino. In seguito si ripete la stessa procedura per il nuovo punto trovato cercando sempre i punti ad esso più vicini che non siano già stati inclusi nel *cammino* che si sta costruendo. Indichiamo ora con θ_i l'angolo secondo cui è orientato l' i -esimo segmento. È possibile a questo punto introdurre una statistica per misurare gli allineamenti definita come:

$$\bar{\mu} = \sum_{i=2}^N \cos(\theta_i - \theta_{i-1}) / (N - 1).$$

Se si sta analizzando una distribuzione poissoniana di punti ci si deve aspettare che dopo un certo numero di passi la statistica assuma valori $\bar{\mu} \approx 0$ con un errore quadratico medio pari a $1/\sqrt{2N}$. Se invece si incontrano n punti allineati secondo un filamento ci si aspetta di ottenere valori dell'ordine di $\bar{\mu} \approx n/N$. Kuhn e Uson misero alla prova il loro metodo sul campione di galassie già precedentemente studiato da Shane e Wirtanen. Approssimarono l'algoritmo sopra descritto per adattarne l'uso ad una griglia quadrata nel seguente modo. Collocarono casualmente sull'area coperta dal catalogo di Shane e Wirtanen una griglia delle dimensioni di $27^\circ \times 27^\circ$. Mediante un cammino casuale analogo a quello precedentemente descritto, si visitano le celle occupate che di volta in volta sono più prossime l'una all'altra. Se esiste più di una cella vicina occupata si sceglie di andare in direzione di quella contenente il maggior numero di oggetti. Una cella non può venir visitata più di una volta e tale procedura deve essere ripetuta fino a quando almeno la metà delle cellette occupate della griglia viene visitata. Confrontarono in seguito i dati così ottenuti con quelli ricavati da distribuzioni aventi la medesima correlazione spaziale di quella reale. Le conclusioni

tratte in base ai risultati ottenuti furono le seguenti. Il metodo proposto pur non essendo in grado di collocare spazialmente le strutture presenti in una distribuzione di punti si dimostra in grado di fornire una descrizione quantitativa del grado di filamentarietà delle dette. Inoltre trovarono evidenze statistiche della presenza di un maggior numero di strutture rispetto a quelle individuate analizzando il campione mediante le funzioni di correlazione a due o tre punti.

3.6 Statistica del *ridge-finding*

Accenniamo ora alla statistica proposta da Moody et al. (1983) per evidenziare le strutture su grande scala nell'universo. Per sommi capi il metodo consiste in questo. Su una griglia bidimensionale quadrata scegliamo a caso una celletta e definiamo su di essa quattro direzioni fondamentali, coincidenti con l'orientamento dei quattro assi di simmetria della celletta. Fatto ciò verifichiamo se essa è un punto di massimo direzionale lungo una delle sopra citate direzioni. Si dice che una celletta è un massimo direzionale se il numero di oggetti in essa contenuti è maggiore o uguale al numero di oggetti contenuti nelle cellette ad essa confinanti lungo una data direzione. Indichiamo con D^i il numero di direzioni per le quali la celletta scelta ha un massimo direzionale. Si dice che essa è un picco se $D^i = 4$, che fa parte di una cresta (*ridge*) se $D^i = 2$ o 3 , o che è una celletta di background se $D^i = 1$ o 0 . Si definisce filamento un insieme di cellette contigue con $D^i \geq 3$.

Moody et al. (1983) hanno applicato tale algoritmo al catalogo di galassie Shane-Wirtanen e a un modello di universo proposto da Sonnerup e Peebles (1978). Sempre con la medesima statistica hanno analizzato un campione di galassie realizzato prima suddividendo la distribuzione Shane-Wirtanen in tante cellette e poi hanno ricomponendo quest'ultime a caso. Il confronto fra le strutture rivelate nelle tre distribuzioni sopra indicate li ha portati a trarre le seguenti conclusioni. Il metodo proposto sembra essere in grado di individuare accuratamente i filamenti individuabili attraverso una prima indagine visuale nel campione di galassie di Shane-Wirtanen. Le proprietà statistiche delle strutture filamentari nelle due distribuzioni di controllo sono simili a quelle individuate nel catalogo reale di galassie. Hanno osservato inoltre che la

distribuzione reale mostra un eccesso di filamenti molto lunghi rispetto a quelle di controllo ma non si sono ritenuti in grado di poter spiegare un tale comportamento in base ai dati in loro possesso.

Capitolo 4

Costruzione delle distribuzioni analizzate

4.1 Le distribuzioni di confronto

Prima di analizzare le strutture su grande scala individuabili in una simulazione N-body di un modello CDM, abbiamo studiato il comportamento delle varie statistiche utilizzate su insiemi di punti raggruppati entro strutture di forma geometrica nota a priori. Abbiamo intrapreso questo tipo di indagine per calibrare il comportamento delle statistiche che utilizzeremo per analizzare queste strutture e per verificare se sono in grado di operare una discriminazione fra le varie distribuzioni di confronto studiate. In seguito, confrontando i dati statistici così ottenuti con quelli ricavati per la simulazione CDM, tenteremo di risalire alla forma intrinseca delle strutture su grande scala in essa osservabili. Il volume occupato dalle distribuzioni di confronto è un cubo di lato unitario, in unità di misura assoluta. Ciascuno dei campioni generati è costituito da 32^3 punti distribuiti nei seguenti cinque modi:

- casualmente in tutto il volume;
- entro un piano di fissato spessore;
- lungo filamenti;
- all'interno di un certo numero di sfere;

- all'esterno di vuoti di forma sferica.

Per costruire le distribuzioni di confronto sono state imposte condizioni di periodicità al bordo del volume di simulazione. Una volta fissato come origine degli assi cartesiani uno degli spigoli del volume cubico entro cui sono stati distribuiti i punti, le coordinate di questi ultimi per le varie distribuzioni di confronto sono state generate nei seguenti modi.

Nel caso delle distribuzioni random le coordinate cartesiane dei punti sono state ricavate casualmente indipendentemente l'una rispetto all'altra generando tre numeri compresi tra 0 e 1 assegnandoli in seguito alle tre coordinate spaziali.

Per distribuire i punti in un piano sono state generate separatamente le coordinate x e y dei punti e abbiamo imposto che la terza coordinata z soddisfacesse alla relazione

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

nella quale i coefficienti A , B , C e D assumono valori arbitrariamente scelti. Al valore di z così ottenuto è stato in seguito sommato un numero generato casualmente fra 0 e 0.1; in tal modo è stato possibile realizzare insiemi di punti distribuiti in piani di spessore pari a 0.1.

Per le distribuzioni a forma di filamenti l'unica coordinata generata casualmente è stata la x . Le rimanenti sono state ricavate imponendo per esse le seguenti condizioni:

$$y = mx + p$$

$$z = nx + q,$$

ove m ed n sono i coefficienti angolari delle proiezioni del filamento sui piani coordinati Oxy e Oxz e p ed q le loro intercette con gli assi coordinati y e z rispettivamente. Anche in questo caso i valori dei parametri m , n , p e q sono stati fissati arbitrariamente. Analogamente a quanto fatto per i piani, una volta ottenuto come indicato il valore delle componenti y e z delle coordinate spaziali dei punti, ad esse è stato sommato un numero generato casualmente compreso tra 0 e quello quantificante lo spessore del filamento. A ciascuno dei filamenti generati abbiamo di volta in volta imposto arbitrariamente il valore dello spessore scegliendolo casualmente fra un numero compreso tra 0.01 e 0.1, costruendo sia filamenti con sezione quadrata che rettangolare.

Per quanto riguarda i campioni distribuiti entro sfere, dapprima sono state generate casualmente ed indipendentemente le une dalle altre le coordinate dei centri delle sfere. Le lunghezze dei raggi sono state generate casualmente facendo in modo tale che le sfere fossero distribuite secondo una gaussiana di media pari a 0.05 e deviazione standard uguale a 0.1. Successivamente i punti sono stati distribuiti uniformemente all'interno di ciascuna sfera.

Con lo stesso metodo descritto per il precedente tipo di distribuzioni di confronto sono stati generati i centri e i raggi delle regioni vuote di forma sferica. In questo caso abbiamo imposto che il valor medio della lunghezza dei raggi sia pari a 0.1 e che la deviazione standard sia pari a 0.1. In seguito, dopo aver generato le coordinate dei punti casualmente ed indipendentemente le une dalle altre, sono stati inclusi nel campione solo quei punti che cadevano all'esterno di tutte le regioni vuote. Nella scelta dei valori dello spessore delle strutture in ciascuna delle distribuzioni di confronto appena introdotte, l'unico criterio seguito è il seguente. Abbiamo cercato di fare in modo che da le strutture non occupassero un volume paragonabile a quello del cubo di simulazione. Inoltre abbiamo volutamente evitato di costruire strutture le cui dimensioni caratteristiche fossero inferiori a quelle delle strutture osservabili nella simulazione CDM

Per ciascuno dei cinque tipi di distribuzioni sopra indicati sono state realizzate cinque differenti simulazioni operando una diversa scelta di numeri casuali e dei parametri impiegati per costruire i vari tipi di campioni di confronto. Per comodità in seguito indicheremo con **R** le distribuzioni randomatiche, con **P** quelle a piani, con **F** quelle a filamenti, con **S** quelle a sfere e con **V** quelle a vuoti. Nelle figure (4.1), (4.2), (4.3), (4.4), (4.5) sono riportati un esempio di scatter plot relativo a ciascun tipo di distribuzione di confronto analizzata. In ciascuna figura sono riportate le proiezioni sui tre piani Oxy , Ozy e Oxz di 4096 punti scelti a caso fra tutti quelli costituenti le varie distribuzioni.

Figura 4.1: Esempio di distribuzione di tipo **R**

Figura 4.2: Esempio di distribuzione di tipo **P**

Figura 4.3: Esempio di distribuzione di tipo **F**

Figura 4.4: Esempio di distribuzione di tipo **S**

Figura 4.5: Esempio di distribuzione di tipo **V**

4.2 La simulazione N-body di un modello CDM

Dopo aver esaminato la morfologia delle distribuzioni di confronto precedentemente introdotte, abbiamo analizzato con gli stessi metodi statistici cinque diversi sottocampioni estratti da una simulazione N-body di clustering gravitazionale di un universo dominato da particelle non collisionali di tipo *cold dark matter* (CDM). Abbiamo già discusso nel paragrafo (1.6) alcune delle implicazioni cosmologiche che comporta l'adozione di questo modello nello studio dell'evoluzione delle strutture su grande scala dell'universo. La simulazione originaria dalla quale sono stati estratti i sottocampioni è stata realizzata per mezzo del metodo *PM*, di cui è stata data una breve descrizione al paragrafo (1.7); essa utilizza 64^3 punti e 64^3 punti griglia; il lato del volume cubico di simulazione è pari a $160h^{-1}$ Mpc. Sono stati assunti i seguenti valori per la costante di Hubble e il parametro di densità: $H_0 = 50$ km/s Mpc^{-1} e $\Omega_0 = 1$, corrispondente ad un universo piatto. È stato inoltre imposto che le fluttuazioni primordiali siano distribuite gaussianamente con uno spettro di potenza caratteristico dei modelli di universo dominati da particelle di tipo CDM con indice spettrale $n = 1$. In accordo con quanto osservato per la distribuzione delle galassie l'evoluzione gravitazionale dei punti è stata interrotta una volta raggiunto il tempo attuale. Si è assunto come tempo attuale (z_0) l'istante in corrispondenza del quale la varianza sulla scala di $R_8 = 8 h^{-1}$ Mpc,

$$\sigma_8^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty P(k)W^2(kR_8)k^2 dk,$$

evoluita secondo la teoria lineare, assume valore unitario. Nella precedente equazione il termine $W^2(kR_8)$ che vi compare è la cosiddetta funzione finestra, assunta essere del tipo *top-hat*. Ciascuno dei sottocampioni analizzati è costituito da 32^3 punti scelti a caso. In figura (4.6) è riportata la proiezione dei punti di uno dei detti sottocampioni.

Figura 4.6: Esempio di sottocampione della simulazione CDM

Capitolo 5

Minimal spanning tree (MST) e funzioni di struttura

5.1 Risultati per le distribuzioni di confronto

5.1.1 Il minimal spanning tree (MST)

Come già fatto da altri autori (Barrow et al. 1985; Plionis et al. 1992), le statistiche che abbiamo usato per studiare la morfologia delle strutture individuabili all'interno delle distribuzioni di oggetti da noi analizzate sono: la funzione di distribuzione $F_{MST}(l/ \langle l \rangle)$ della lunghezza dei segmenti appartenenti all'MST, il rapporto fra la funzione $F_{MST}(l/ \langle l \rangle)$ e la funzione di distribuzione $F_{All}(l/ \langle l \rangle)$ della lunghezza dei segmenti che connettono in tutti i modi possibili i punti delle distribuzioni di confronto, ove $\langle l \rangle = n^{-1/3}$ e n è il numero di oggetti appartenenti al campione. Inoltre abbiamo studiato l'andamento della funzione di distribuzione $R(l/ \langle l \rangle)$ dei segmenti appartenenti all'MST sul quale sono state eseguite le operazioni di *pruning* e *separating*, come descritto all'inizio del paragrafo (3.1); quello del numero di filamenti individuati in funzione della loro lunghezza fisica totale, $N(l_T)$; il rapporto tra la distanza fra le due estremità di un filamento e la lunghezza fisica totale dello stesso.

Prima di procedere all'applicazione della statistica dell'MST alle distribuzioni di

confronto a disposizione, si è verificato come la scelta della lunghezza di *separating* e del livello di *pruning* potevano influenzare l'andamento dei risultati per le funzioni $R(l/ \langle l \rangle)$. Una tale verifica è stata fatta solo sulle distribuzioni di tipo **R** e le coppie di parametri impiegati è riportata in tabella (5.1). Il valore di $\langle l \rangle$ citato in tabella è stato ancora calcolato mediante la relazione $n^{-1/3}$, nella quale n è il numero di oggetti facenti parte della distribuzione. I risultati ottenuti sono riportati in figura

| lunghezza di <i>separating</i> | livello di <i>pruning</i> |
|-----------------------------------|------------------------------|
| 0.8 $\langle l \rangle$ | 9 |
| 1.2 $\langle l \rangle$ | 9 |
| 0.8 $\langle l \rangle$ | 14 |
| 1.2 $\langle l \rangle$ | 14 |
| 1.2 $\langle l \rangle$ | 19 |
| 0.8 $\langle l \rangle$ | 19 |

Tabella 5.1: Parametri di *separating* e *pruning* utilizzati per studiare l'andamento dei risultati delle funzioni $R(l/ \langle l \rangle)$ in distribuzioni di tipo **R**

(5.1). Tale figura mostra che al variare dei parametri di *separating* e *pruning* non cambia sostanzialmente l'andamento di $R(l/ \langle l \rangle)$. Sulla base dei risultati così ottenuti, si è scelto di adottare come lunghezza di *separating* 1.2 $\langle l \rangle$ e come livello di *pruning* 14. La scelta di questi due parametri non è casuale ma rappresenta un buon compromesso per ottenere un adeguatamente elevato numero di filamenti, costituiti da un buon numero di oggetti, dai quali ricavare risultati statisticamente robusti. I dati statistici ottenuti per ciascun tipo di distribuzione sono stati mediati tra le cinque diverse realizzazioni ed in seguito le funzioni di distribuzione medie sono state confrontate fra loro con il test di Kolmogorov-Smirnoff, che d'ora in poi indicheremo con il simbolo KS. Di seguito faremo sempre riferimento alle funzioni di distribuzione medie ricavate da ciascun tipo di campione di confronto. Le funzioni di distribuzione che hanno mostrato l'andamento più stabile sono quelle relative ai cinque campioni di tipo **R**. Negli altri casi abbiamo notato lievi differenze fra gli istogrammi ricavati dalle cinque realizzazioni di ciascun tipo di campione di confronto. Il fatto che l'andamento

Figura 5.1: Andamento delle $R(l/ < l >)$ in funzione dei parametri di *pruning* e *separating* adottati in modelli di tipo **R**

delle curve delle funzioni di distribuzione ricavate per i campioni di tipo **R** sia molto stabile è dovuto al fatto che in questi casi il volume occupato dai punti è sempre lo stesso. Nei campioni realizzati per gli altri tipi di distribuzioni di confronto il volume occupato dalle strutture entro cui di volta in volta sono stati distribuiti i punti non è mai lo stesso. Tali sensibili differenze sono la causa che genera le fluttuazioni delle curve delle funzioni di distribuzione attorno alla curva media calcolata. In seguito verrà mostrato che all'aumentare del volume occupato dai punti le funzioni di distribuzione assumono sempre più l'andamento tipico osservato per i campioni di confronto di tipo **R**.

Per prima cosa abbiamo verificato che l'andamento delle funzioni $F_{MST}(l/ < l >)$ e $F_{MST}(l/ < l >)/F_{Au}(l/ < l >)$, riportato nelle figure (5.2) e (5.3), relative alle distribuzioni di tipo **R** è molto simile a quello ricavato da Barrow et al. (1985), sempre per distribuzioni random di oggetti. In seguito abbiamo osservato che visivamente gli istogrammi delle funzioni $F_{MST}(l/ < l >)$ sono sostanzialmente diversi fra loro a parte quelli relativi alle distribuzioni di tipo **R** e **V**. Anche gli istogrammi relativi alle distribuzioni di tipo **P** ed **F** appaiono a prima vista abbastanza simili fra loro. Tale impressione visuale è però solo illusoria poichè, confrontando le funzioni $F_{MST}(l/ < l >)$ relative alle nominate distribuzioni mediante il test KS, abbiamo riscontrato in entrambi questi casi che la probabilità che le relative funzioni $F_{MST}(l/ < l >)$ siano state costruite a partire dalla medesima distribuzione è inferiore all'1%. Tuttavia va notato che le funzioni cumulative ricavabili dalle funzioni $F_{MST}(l/ < l >)$ e relative alle distribuzioni di tipo **R** e **V** sono in assoluto le più simili tra loro, come indicato dalla massima differenza misurata riportata in tabella (5.2). Ciò indica che fra i due tipi di campioni di confronto esistono alcune significative similitudini. È molto probabile che la somiglianza fra i campioni di tipo **R** e **V** sia dovuta al fatto che nelle distribuzioni di tipo **V**, i raggi delle regioni sferiche vuote siano in maggioranza molto piccoli. Ciò fa sì che la maggior parte del volume del cubo di simulazione risulti occupata da punti e quindi le distribuzioni di confronto di tipo **V** appaiano molto simili ad un campione di tipo **R**. In seguito abbiamo verificato che aumentando la lunghezza del raggio medio delle regioni sferiche vuote le funzioni $F_{MST}(l/ < l >)$ relative ai campioni di tipo **R** e **V** diventavano più dissimili fra loro. Rimandiamo però a tra poco la discussione dei

Figura 5.2: Confronto fra le funzioni $F_{MST}(l/ \langle l \rangle)$ ricavate per ciascuna delle distribuzioni analizzate

risultati statistici ottenuti da questa ulteriore indagine. Lo stesso ragionamento vale per gli istogrammi delle distribuzioni a piani e a filamenti. In questo caso i volumi occupati dalle strutture di questi due tipi di distribuzioni con tutta probabilità sono molto simili fra loro. In tabella (5.2) sono riportati valori delle differenze massime osservate fra le funzioni cumulative delle $F_{MST}(l/ < l >)$. Sebbene talune volte i valori della differenza siano piccoli, tutti corrispondono a probabilità inferiori all'1% che le distribuzioni siano ricavate dal medesimo campione. Una semplice indagine visuale mostra come le funzioni di distribuzione $F_{MST}(l/ < l >)/F_{All}(l/ < l >)$ siano sostanzialmente diverse fra loro. Contrariamente a quanto fatto per le funzioni $F_{MST}(l/ < l >)$, non abbiamo confrontato fra loro i vari grafici dei risultati statistici per mezzo del test KS poichè essi non sono veri istogrammi ma il rapporto di due istogrammi e in tal senso ad essi non può essere applicato il test KS.

Successivamente abbiamo analizzato il comportamento delle funzioni di distribuzione $R(l/ < l >)$, riportate in figura (5.4). Come si vede facilmente da tale figura l'andamento delle funzioni $R(l/ < l >)$ relative alle distribuzioni di tipo **F** e **S** è nettamente differente da quello di tutte le altre. I risultati ottenuti per mezzo del test KS hanno mostrato una probabilità del 62.8% che le funzioni $R(l/ < l >)$ relative alle distribuzioni **R** e **V** siano state ricavate dal medesimo campione. Ciò sembra confermare le ipotesi precedentemente formulate riguardo alla notevole somiglianza fra le distribuzioni di tipo **R** e **V**. Il test KS ha rilevato anche una probabilità pari al 25.1% che le funzioni $R(l/ < l >)$ delle distribuzioni **R** e **V** siano state costruite a partire dallo stesso campione. Questo inatteso comportamento è quasi sicuramente imputabile al fatto che le operazioni di *pruning* e *separating* possono aver notevolmente distorto la forma della funzione di distribuzione della lunghezza dei lati appartenenti all'MST mascherandone così l'andamento caratteristico di ciascun di tipo di campione di confronto. In tabella (5.3) sono riportati i valori delle differenze massime fra le funzioni cumulative ricavate dalle funzioni di distribuzione $R(l/ < l >)$. A parte i due casi ora trattati, i rimanenti valori, esclusi quelli riguardanti i campioni di confronto di tipo **S1** e **V1** che discuteremo in seguito, corrispondono a probabilità inferiori all'1% che le distribuzioni siano state costruite a partire dal medesimo campione.

Figura 5.3: Confronto fra le funzioni $F_{MST}(l/ < l >)/F_{Au}(l/ < l >)$ ricavate per ciascuna delle distribuzioni analizzate

| | Tipo di campione di confronto | | | | | |
|-----------|-------------------------------|-----------|----------|----------|----------|----------|
| | V1 | S1 | V | S | F | P |
| R | 0.63 | 0.64 | 0.23 | 0.66 | 0.90 | 0.78 |
| P | 0.28 | 0.28 | 0.67 | 0.27 | 0.49 | |
| F | 0.68 | 0.28 | 0.86 | 0.26 | | |
| S | 0.41 | 0.03 | 0.60 | | | |
| V | 0.48 | 0.58 | | | | |
| S1 | 0.40 | | | | | |

Tabella 5.2: Differenza massima fra le funzioni cumulative di $F_{MST}(l/ < l >)$

| | Tipo di campione di confronto | | | | | |
|-----------|-------------------------------|-----------|----------|----------|----------|----------|
| | V1 | S1 | V | S | F | P |
| R | 0.02 | 0.30 | 0.01 | 0.29 | 0.19 | 0.03 |
| P | 0.09 | 0.29 | 0.01 | 0.28 | 0.18 | |
| F | 0.18 | 0.15 | 0.18 | 0.13 | | |
| S | 0.28 | 0.03 | 0.29 | | | |
| V | 0.08 | 0.30 | | | | |
| S1 | 0.29 | | | | | |

Tabella 5.3: Differenza massima fra le funzioni cumulative di $R(l/ < l >)$

| | Tipo di campione di confronto | | | | | |
|-----------|-------------------------------|-----------|----------|----------|----------|----------|
| | V1 | S1 | V | S | F | P |
| R | 0.36 | 0.61 | 0.13 | 0.62 | 0.80 | 0.54 |
| P | 0.19 | 0.23 | 0.45 | 0.26 | 0.33 | |
| F | 0.48 | 0.19 | 0.73 | 0.18 | | |
| S | 0.37 | 0.03 | 0.55 | | | |
| V | 0.30 | 0.54 | | | | |
| S1 | 0.35 | | | | | |

Tabella 5.4: Differenza massima fra le funzioni cumulative di $N(l_T)$

Figura 5.4: Confronto fra le funzioni $R(l/ < l >)$ ricavate per ciascuna delle distribuzioni analizzate

Osservando l'andamento degli istogrammi delle funzioni $N(l_T)$, riportati in figura (5.5), si nota come ancora una volta quelli relativi alle distribuzioni di tipo **R** e **V** siano molto simili fra loro. Il test KS ha fornito una probabilità inferiore all'1% che le due funzioni di distribuzione possano essere state estratte dal medesimo campione di confronto. Tuttavia, come già osservato in precedenza analizzando le funzioni $F_{MST}(l/ < l >)$, le funzioni cumulative ricavate dalle funzioni $N(l_T)$ relative ai campioni di tipo **R** e **V** sono molto simili fra loro. Infatti la differenza massima misurata fra le due funzioni cumulative è risultata essere la minima fra tutte quelle osservate e riportate in tabella (5.4). Tutti i rimanenti valori riguardanti le distribuzioni di tipo **R**, **P**, **F**, **S** e **V** corrispondono a probabilità inferiori all'1% che le distribuzioni siano state ricavate dal medesimo campione. Abbiamo inoltre notato che la lunghezza totale massima dei filamenti individuati nelle distribuzioni di tipo **F** è inferiore a quella osservata per le altre distribuzioni. La cosa è parsa sulle prime molto strana in quanto era plausibile aspettarsi di individuare nelle distribuzioni di tipo **F** pochi filamenti ma di lunghezza fisica totale molto grande. Una spiegazione del perchè di un simile comportamento è questa. Dato il basso livello di *pruning* adottato, la struttura principale latente può essere stata mascherata da numerose piccole sottostrutture che si dipartono da essa. L'algoritmo impiegato per l'individuazione dei singoli filamenti non è stato quindi in grado di rilevare l'intera struttura principale frazionandola in molti filamenti più piccoli. Parimenti è parso molto strano che nelle distribuzioni di tipo **S** venissero individuati filamenti di lunghezza fisica molto grande. Essendo le sfere, entro cui sono distribuiti i punti, delle strutture molto compatte e talvolta isolate, ci si aspettava di individuare solo filamenti fisicamente corti. Una verosimile spiegazione della presenza di questi filamenti molto lunghi è la seguente. Come già accennato, le sfere entro cui sono distribuiti i punti talvolta sono strutture isolate. Di conseguenza l'MST delle distribuzioni di tipo **S** conterrà segmenti fisicamente molto lunghi. Tali segmenti sono quelli che connettono fra loro le varie sfere isolate. È assai probabile che la lunghezza di *separating* adottata non sia sufficientemente bassa per separare fra loro nell'MST tutte queste strutture isolate. I segmenti molto lunghi che non vengono eliminati mediante il *separating* sono quelli che connettono fra loro strutture sferiche isolate ma tuttavia distanti fra loro meno di $1.2\langle l \rangle$. Per cui se, si confrontano

Figura 5.5: Confronto fra le funzioni $N(l_T)$ ricavate per ciascuna delle distribuzioni analizzate

due filamenti appartenenti a dette distribuzioni, pur essendo formati dal medesimo numero di segmenti, può accadere che il filamento individuato in una distribuzione di tipo **S** abbia una lunghezza fisica totale superiore rispetto a quello rilevato nella distribuzione di tipo **F**. Abbiamo trovato conferma a queste nostre ipotesi in test condotti successivamente e di cui si farà menzione in seguito. Riguardo alle funzioni di distribuzione del rapporto tra la distanza fra le due estremità di un filamento, d , e la lunghezza complessiva dello stesso, l_T , riportate in figura (5.6), la loro analisi sia visuale sia mediante il test KS sembra indicare che queste funzioni hanno un andamento molto simile le une rispetto alle altre. Ciò non le rende in grado di operare una discriminazione fra i vari tipi di campioni di confronto studiati. In tabella (5.5) sono riportati i valori delle differenze massime osservate fra le relative funzioni cumulative. I valori molto piccoli misurati corrispondono a probabilità superiori all'80% che le due distribuzioni confrontate siano state ricavate dal medesimo campione.

| | Tipo di campione di confronto | | | | | |
|-----------|-------------------------------|-----------|----------|----------|----------|----------|
| | V1 | S1 | V | S | F | P |
| R | 0.05 | 0.19 | 0.03 | 0.10 | 0.07 | 0.02 |
| P | 0.03 | 0.18 | 0.02 | 0.08 | 0.06 | |
| F | 0.08 | 0.15 | 0.06 | 0.13 | | |
| S | 0.07 | 0.26 | 0.07 | | | |
| V | 0.03 | 0.19 | | | | |
| S1 | 0.19 | | | | | |

Tabella 5.5: Differenza massima fra le funzioni cumulative di $N(d/l_T)$

A questo punto, per verificare se le spiegazioni proposte per risolvere alcuni dei quesiti sorti durante l'analisi dei dati statistici sin qui raccolti, abbiamo generato altri cinque campioni di confronto in cui il raggio medio delle regioni sferiche prive di punti è superiore a quello delle distribuzioni di tipo **V**, chiamati per comodità in seguito di tipo **V1**. Abbiamo inoltre generato anche altri cinque campioni di punti distribuiti entro sfere ma in modo che la densità di punti fosse maggiore verso il centro delle sfere e minore al loro bordo, chiamate in seguito distribuzioni di tipo **S1**. Abbiamo osservato che esiste una probabilità inferiore all'1% che le curve medie

Figura 5.6: Confronto fra le funzioni $N(d/l_T)$ ricavate per ciascuna delle distribuzioni analizzate

delle funzioni di distribuzione $F_{MST}(l/ < l >)$ dei campioni di confronto di tipo **S** e **S1** siano state generate a partire dal medesimo campione. Tuttavia la differenza massima osservata fra le funzioni cumulative delle $F_{MST}(l/ < l >)$ è molto esigua. Ciò fa supporre che le due distribuzioni abbiano caratteristiche morfologiche molto simili. Come era lecito aspettarsi, per le distribuzioni di tipo **S1** è aumentato il numero dei filamenti individuati aventi lunghezza totale molto bassa rispetto a quello ottenuto per le distribuzioni di tipo **S**. La spiegazione di ciò è molto semplice. In questo caso, essendo i punti molto più vicini fra loro rispetto a quelli appartenenti alle distribuzioni di tipo **S**, la lunghezza totale dei filamenti trovati è in media molto minore. Nel caso dei campioni di punti di tipo **V1** l'analisi dei dati statistici per mezzo del test KS ha messo in evidenza alcuni aspetti significativi. In primo luogo, come ci aspettavamo, il livello di probabilità che le funzioni di distribuzione $F_{MST}(l/ < l >)$ relative alle distribuzioni di punti di tipo **R** e **V1** siano state ricavate dal medesimo campione è ancora notevolmente inferiore all'1%. La differenza massima misurata fra le due funzioni cumulative è però passata da 0.23 a 0.63, come riportato in tabella (5.2). Ciò indica che i due tipi di campioni di confronto sono ora molto più diversi fra loro. Sempre per mezzo del test KS abbiamo rilevato una percentuale pari al 81.4% di probabilità che le funzioni $R(l/ < l >)$ relative alle distribuzioni di tipo **P** e **V1** siano state costruite a partire dal medesimo campione. Un tale livello di verosimiglianza può essere giustificato con semplici considerazioni sulla forma assunta dallo spazio occupato dai punti nelle distribuzioni di tipo **V1**. L'indagine visuale dei grafici di questi campioni di riferimento ha mostrato che, essendo i volumi sferici vuoti molto grandi, i punti si distribuiscono entro strutture molto schiacciate che possono aver simulato una struttura bidimensionale molto simile ad un piano. Inoltre, come già accennato per le distribuzioni di tipo **S1**, abbiamo osservato un aumento del numero di filamenti di lunghezza totale molto bassa rispetto a quanto osservato per le funzioni $N(l_T)$ relative alle distribuzioni di tipo **V**. Confrontando la funzione $R(l/ < l >)$ media relativa alle distribuzioni di tipo **V1** con quelle delle altre distribuzioni sono emersi altre significative rassomiglianze. Il test KS ha mostrato che esiste una probabilità pari al 12.1% che le funzioni $R(l/ < l >)$ relative alle distribuzioni di tipo **R** e **V1** siano state ricavate dal medesimo campione, nettamente inferiore a quella

precedentemente osservata per le distribuzioni di tipo **R** e **V** che era pari al 62.8%. Inoltre ha fornito un livello di probabilità pari al 91.5% che le funzioni $R(l/ < l >)$ relative alle distribuzioni di tipo **V** e **V1** possano essere state costruite a partire dal medesimo campione.

Una volta terminata questa serie di analisi abbiamo riapplicato la statistica dell'MST utilizzando come $\langle l \rangle$ al posto della quantità $n^{-1/3}$ la lunghezza media dei segmenti appartenenti all'MST, \mathcal{L}_{MST} , vedi tabella (5.6). Le lunghezze medie \mathcal{L}_{MST} calcolate per ciascun tipo di distribuzione analizzata sono, come del resto era prevedibile, basse in quei campioni in cui il volume occupato dalle strutture entro cui sono distribuiti i punti è basso, come ad esempio nel caso dei campioni di tipo **F**. Il valore di \mathcal{L}_{MST} cresce man mano che tali strutture tendono ad occupare una sempre maggiore porzione del volume del cubo di simulazione. Come già ampiamente discusso nel precedente capitolo, sia Barrow et al. (1985) che Plionis et al. (1992) hanno adottato come lunghezza caratteristica per la lunghezza di *separating* la lunghezza media dei segmenti appartenenti all'MST, \mathcal{L}_{MST} . È bene ricordare che l'obiettivo principale di entrambi i citati autori era quello di verificare se la statistica dell'MST era in grado di rendere conto dell'esistenza dei filamenti individuati visivamente all'interno dei campioni di oggetti studiati. Inoltre si sono limitati a verificare se le sole funzioni $F_{MST}(l/ < l >)$ e $F_{MST}(l/ < l >)/F_{Au}(l/ < l >)$ erano in grado di operare una discriminazione fra i campioni di oggetti da loro studiati.

| | campioni di tipo R | campioni di tipo P | campioni di tipo F | campioni di tipo S | campioni di tipo V |
|---------------------|---------------------------|---------------------------|---------------------------|---------------------------|---------------------------|
| \mathcal{L}_{MST} | $2.04*10^{-2}$ | $8.69*10^{-3}$ | $4.67*10^{-3}$ | $8.00*10^{-3}$ | $1.71*10^{-2}$ |
| σ | $0.06*10^{-2}$ | $1.61*10^{-3}$ | $0.44*10^{-3}$ | $1.39*10^{-3}$ | $0.07*10^{-2}$ |

Tabella 5.6: Lunghezza media \mathcal{L}_{MST} dei segmenti appartenenti all'MST

Si nota facilmente che l'andamento della parte iniziale degli istogrammi delle nuove funzioni di distribuzione $R(l/\mathcal{L}_{MST})$, graficati in figura (5.7), non è affatto cambiato rispetto agli analoghi istogrammi riportati in figura (5.4). Ancora una volta si vede subito che le funzioni $R(l/\mathcal{L}_{MST})$ relative ai campioni di tipo **F** e **S** hanno ancora

un andamento nettamente riconoscibile rispetto a tutte le altre. Invece le funzioni $R(l/\mathcal{L}_{MST})$ relative alle distribuzioni di tipo **R**, **P** e **V** appaiono molto simili fra loro. I risultati del test KS eseguito sulle funzioni $R(l/\mathcal{L}_{MST})$ di tali tipi di distribuzioni indicano che esiste una probabilità pari 46.0% che le funzioni di distribuzione relative ai campioni di tipo **R** e **P** siano state ricavate dal medesimo campione, pari al 95.7% per quelle relative alle distribuzioni di tipo **R** e **V** e pari al 95.0% per quelle di tipo **P** e **V**. In tutti gli altri casi le differenze massime fra le funzioni cumulative, riportate in tabella (5.7), corrispondono ad una probabilità inferiore all'1% che le due distribuzioni analizzate siano state ricavate dal medesimo campione. Risulta inoltre evidente che la lunghezza totale massima dei filamenti individuati in ciascun tipo di distribuzione, vedi figura (5.8), si è notevolmente ridotta rispetto a quella osservata quando come parametro per la lunghezza di *separating* è stato usato $\langle l \rangle = n^{-1/3}$. Ciò conferma le ipotesi precedentemente avanzate per spiegare l'esistenza di filamenti fisicamente molto lunghi nelle distribuzioni di tipo **S**. Tuttavia ancora una volta l'analisi della funzione di distribuzione del numero di filamenti in funzione della loro lunghezza totale relativa alle distribuzioni di tipo **F** non mostrava l'andamento atteso, cioè pochi filamenti fisicamente molto lunghi. Abbiamo quindi rimandato la conferma delle ipotesi precedentemente fatte riguardo a tale problema ad una successiva serie di prove appositamente eseguite. In tabella (5.8) sono riportate le differenze misurate fra le funzioni cumulative ricavate dalle $N(l_T)$, tutte corrispondenti a probabilità inferiori all'1% che le due distribuzioni analizzate siano state ricavate dal medesimo campione. Per le funzioni di distribuzione del rapporto tra la distanza fra le due estremità di un filamento e la lunghezza complessiva dello stesso, riportate in figura (5.9), valgono ancora le considerazioni precedentemente fatte.

Per concludere la serie di indagini condotte per mezzo dell'MST sui campioni di confronto analizzati, abbiamo voluto verificare se al variare del volume dello spazio occupato dai punti le funzioni di distribuzione $F_{MST}(l/ \langle l \rangle)$ relative ai campioni di tipo **P**, **F**, **S** e **V** diventavano più o meno simili a quelle ricavate per le distribuzioni di tipo **R**. A tal fine abbiamo generato tre distribuzioni per ciascun tipo di campione di confronto, ad eccezione di quelli di tipo **R**, nelle quali abbiamo aumentato, rispetto ai campioni di confronto introdotti nel capitolo 4, lo spessore dei piani e dei filamenti,

Figura 5.7: Confronto fra le funzioni $R(l/\mathcal{L}_{MST})$ ricavate per ciascuna delle distribuzioni analizzate

Figura 5.8: Confronto fra le funzioni $N(l_T)$ ricavate per ciascuna delle distribuzioni analizzate adottando come lunghezza caratteristica di *separating* \mathcal{L}_{MST}

Figura 5.9: Confronto fra le funzioni $N(d/l_T)$ ricavate per ciascuna delle distribuzioni analizzate adottando come lunghezza caratteristica di *separating* \mathcal{L}_{MST}

| Tipo di campione di confronto | | | | |
|-------------------------------|----------|----------|----------|----------|
| | V | S | F | P |
| R | 0.01 | 0.50 | 0.39 | 0.02 |
| P | 0.01 | 0.49 | 0.37 | |
| F | 0.38 | 0.21 | | |
| S | 0.50 | | | |

Tabella 5.7: Differenza massima fra le funzioni cumulative di $R(l/\mathcal{L}_{MST})$

| Tipo di campione di confronto | | | | |
|-------------------------------|----------|----------|----------|----------|
| | V | S | F | P |
| R | 0.32 | 0.85 | 0.89 | 0.87 |
| P | 0.79 | 0.32 | 0.45 | |
| F | 0.80 | 0.13 | | |
| S | 0.76 | | | |

Tabella 5.8: Differenza massima fra le funzioni cumulative di $N(l_T)$

| Tipo di campione di confronto | | | | |
|-------------------------------|----------|----------|----------|----------|
| | V | S | F | P |
| R | 0.05 | 0.25 | 0.09 | 0.05 |
| P | 0.02 | 0.22 | 0.06 | |
| F | 0.06 | 0.11 | | |
| S | 0.22 | | | |

Tabella 5.9: Differenza massima fra le funzioni cumulative di $N(d/l_T)$

il numero e le dimensioni delle sfere e delle regioni sferiche prive di punti. In seguito abbiamo costruito ulteriori tre distribuzioni di tipo **P**, **F**, **S** e **V** in cui abbiamo diminuito il valore di detti parametri. Dall'analisi delle funzioni di distribuzione medie F_{MST} così ottenute, mediante il test KS, è emerso che la probabilità che esse siano state ricavate da una distribuzione di tipo **R** è in tutti i casi inferiore al 1% sia quando il volume occupato dai punti è piccolo sia quando il volume occupato diventa prossimo al volume del cubo di simulazione. Tuttavia, come si può vedere dalla tabella (5.10), le differenze fra le funzioni cumulative delle $F_{MST}(l/ < l >)$ delle distribuzioni di tipo **R** e quelle nuove di tipo **P**, **F**, **S** e **V** sono più marcate nel primo caso e meno nel secondo. Ciò implica che più il volume occupato dalle strutture piene di punti è uguale a quello del cubo di simulazione, più le funzioni di distribuzione $F_{MST}(l/ < l >)$ assumono l'andamento tipico osservato per le distribuzioni di tipo **R**.

| tipo di campione | distribuzioni occupanti una piccola porzione del volume di simulazione | distribuzioni occupanti una grande porzione del volume di simulazione |
|------------------|------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------|
| P | 0.88 | 0.51 |
| F | 0.98 | 0.37 |
| S | 0.72 | 0.25 |
| V | 0.96 | 0.29 |

Tabella 5.10: Differenza massima fra le funzioni cumulative di $F_{MST}(l/ < l >)$

Come già riscontrato dall'analisi della funzione di distribuzione $N(l_T)$ relative ai campioni di confronto di tipo **F** precedentemente costruite, anche nel caso di quest'ultimi campioni di prova la nuova funzione $N(l_T)$ costruita per le distribuzioni di tipo **F** non ha mostrato l'andamento atteso. In particolare ritenevamo che nei campioni in cui avevamo distribuito i punti entro pochi filamenti molto sottili, le strutture principali che percorrono in tutta la loro lunghezza i detti filamenti fossero ramificate in molti filamenti secondari costituiti da un numero di segmenti inferiore al livello di *pruning*. Poichè non abbiamo ancora osservato l'andamento della funzione $N(l_T)$ atteso, si è deciso di rianalizzare tutte e sei le ulteriori distribuzioni di punti di

tipo **F** generate elevando a 40 il livello di *pruning* e riosservare come nel frattempo la forma della funzione $N(l_T)$ era cambiata. Il numero di filamenti trovati era notevolmente diminuito rispetto a quelli individuati in precedenza nei medesimi campioni. Come atteso, le strutture principali traccianti la forma dei filamenti entro cui sono distribuiti i punti, liberate dalle strutture molto più piccole che vi si innestavano, apparivano nettamente. Ciò sembra confermare l'esattezza delle ipotesi fatte precedentemente per spiegare i risultati ottenuti dall'analisi delle funzioni $N(l_T)$ ricavate per le distribuzioni di confronto di tipo **F**.

Sulla base dei risultati statistici ottenuti, possiamo fare alcune significative considerazioni, la più importante delle quali verte su quale criterio adottare nella scelta della lunghezza caratteristica da impiegare come lunghezza di *separating*. È nostra convinzione che la scelta fra la lunghezza $\langle l \rangle = n^{-1/3}$ e \mathcal{L}_{MST} comporti in entrambi i casi vantaggi e svantaggi. Qualora si decida di impiegare $\langle l \rangle = n^{-1/3}$ come lunghezza caratteristica, è abbastanza ragionevole supporre che le strutture evidenziate dall'MST, in ciascuna delle distribuzioni di confronto analizzate, abbiano caratteristiche abbastanza simili tra loro. Tuttavia adottando una lunghezza di *separating* così grande rispetto alla lunghezza media dei lati appartenenti all'MST, si corre il rischio di mantenere connesse fra loro strutture che visualmente ci appaiono invece isolate, o nel caso reale considerare appartenenti ad uno stesso cluster galassie che in realtà non sono gravitazionalmente legate fra loro. Se invece si decide di adottare la lunghezza \mathcal{L}_{MST} come lunghezza caratteristica di *separating* in alcuni casi si rischia di esaminare solo le regioni in cui i punti sono maggiormente addensati e di frammentare i cluster reali in numerose sottostrutture più piccole. Poiché non è stato possibile fornire nuove e risolutive argomentazioni a favore della scelta dell'una o dell'altra delle lunghezze caratteristiche introdotte abbiamo deciso di impiegare nelle successive analisi statistiche la quantità \mathcal{L}_{MST} , uniformandoci così alla scelta operata da tutti gli autori in letteratura.

5.1.2 Le funzioni di struttura

Prima di intraprendere l'analisi vera e propria delle distribuzioni di confronto, abbiamo verificato se il comportamento teorico delle funzioni di struttura era quello previsto in letteratura. Per prima cosa, una volta fissato arbitrariamente il valore dei parametri μ e ν , abbiamo risolto l'equazione (3.4.3) in funzione di a . Fra le soluzioni trovate abbiamo considerato solo quelle con valori compresi fra 0 e 1 e ce ne siamo serviti per costruire le curve parametriche $a(\mu, \nu)$. Abbiamo quindi osservato se ottenevamo per le curve $a(\mu, \nu)$ lo stesso andamento calcolato da Babul e Starkman (1992). Confrontando la figura da noi ottenuta, figura (5.10), con quella riportata nel citato articolo, appare chiaramente che esse sono molto simili fra loro.

Figura 5.10: Curve parametriche di $a(\mu, \nu)$

In seguito abbiamo verificato se nel caso di strutture isolate a forma di piani, filamenti o sfere le funzioni di struttura ottenevamo i valori previsti dalla teoria.

A tal scopo abbiamo realizzato tre campioni in cui abbiamo distribuito mille punti casualmente entro un piano, un filamento e una sfera rispettivamente. Le dimensioni di tali strutture non influenzano in alcun modo il risultato che ci proponiamo di ottenere. Tuttavia abbiamo fatto attenzione a realizzare strutture che occupassero un volume comunque inferiore a quello del cubo di simulazione. Per le tre strutture analizzate le statistiche hanno fornito i risultati attesi, cioè $(S_1, S_2, S_3) = (0, 1, 0)$ per il piano, $(S_1, S_2, S_3) = (1, 0, 0)$ per il filamento e $(S_1, S_2, S_3) = (0, 0, 1)$ per la sfera. Ciò conferma la bontà delle funzioni di struttura quali indicatori statistici della forma di ammassi di punti.

A questo punto abbiamo intrapreso l'analisi vera e propria delle distribuzioni di confronto. Seguendo le indicazioni fornite da Pearson e Coles (1995), siamo ripartiti dall'MST precedentemente costruito per ciascuno dei campioni di confronto e su di esso abbiamo eseguito la sola operazione di *separating* impiegando come lunghezza di *separating* la quantità $1.2\mathcal{L}_{MST}$. Dopo di che abbiamo analizzato con le funzioni di struttura la forma dei cluster così individuati. Nelle figure (5.11), (5.12) e (5.13) è riportato l'andamento delle tre quantità S_1 , S_2 e S_3 in funzione del numero di punti costituenti i cluster analizzati.

Si nota immediatamente che solo per i campioni di tipo **S** le statistiche applicate hanno fornito i valori attesi. In questo caso si può constatare che mediante l'algoritmo impiegato, sono stati individuati molti cluster quasi perfettamente sferici, sicuramente identificabili con le strutture isolate sferiche osservabili nelle distribuzioni di tipo **S**. Appaiono facilmente interpretabili anche i risultati ottenuti per le distribuzioni di tipo **F**. Per esse si osserva che i cluster individuati numericamente più grandi hanno forma molto più filamentosa e bidimensionale, ma meno sferico/uniforme, rispetto a quelli osservati negli altri tipi di distribuzione. Ciò si spiega facilmente riflettendo sul fatto che le funzioni sono indicatori molto sensibili della forma di un cluster; perciò ogni piccola deviazione dalla forma ideale, piano, filamento o sfera, fa sí che i parametri S_1 , S_2 e S_3 assumano valori molto diversi da quelli teorici. Nel caso dei campioni di tipo **F**, se i cluster individuati si estendono su uno o più dei filamenti entro cui sono distribuiti i punti, anche se la loro forma ci può apparire visivamente abbastanza prolata, le funzioni S_1 , S_2 e S_3 ci indicheranno correttamente che la loro forma non

lo è, come invece ci si aspetterebbe.

Analoghe considerazioni possono essere fatte per spiegare il perchè nel caso delle distribuzioni di tipo \mathbf{P} non siano stati osservati cluster di forma chiaramente oblata. Anche in questo caso i cluster isolati con il metodo in precedenza descritto non riflettono su piccola scala quella che è la struttura su grande scala entro cui sono confinati. La loro forma è invece fortemente dipendente dagli allineamenti di punti evidenziati dalla costruzione dell'MST. Per concludere abbiamo verificato per qualcuna delle distribuzioni analizzate si poteva osservare una qualche correlazione fra le quantità S_1 , S_2 e S_3 , ma dai dati in nostro possesso non sembra emergere alcuna significativa correlazione.

Le uniche indicazioni che abbiamo tratto da queste analisi si riassumono nelle seguenti considerazioni. Sebbene le funzioni di struttura si dimostrino perfettamente in grado di descrivere la forma di semplici strutture isolate, non mostrano una paragonabile efficienza quando si trovano ad analizzare più strutture sovrapposte l'una sull'altra, anche quando hanno caratteristiche geometriche identiche.

5.2 Risultati per la simulazione CDM

5.2.1 Il minimal spanning tree (MST)

Dopo aver analizzato le distribuzioni di confronto come ampiamente nel paragrafo (5.1.1), abbiamo applicato lo stesso metodo statistico anche sui sottocampioni di punti estratti dalla simulazione N-body del modello CDM. L'MST di queste distribuzioni è stato analizzato utilizzando come lunghezza di *separating* $1.2\mathcal{L}_{MST}$ e assumendo come livello di *pruning* 14. Il motivo per cui abbiamo adottato questi due valori è stato ampiamente esposto nei precedenti paragrafi. Dopo aver mediato i dati statistici ottenuti per i cinque diversi sottocampioni abbiamo confrontato le funzioni di distribuzione medie ottenute con quelle già ricavate per le distribuzioni di confronto per mezzo del test KS. Le differenze massime osservate fra le varie funzioni cumulative sono riportate nelle tabelle (5.11), (5.12), (5.13) e (5.14).

Figura 5.11: Confronto fra la forma dei cluster individuati nelle distribuzioni di tipo **R** e **P**

Figura 5.12: Confronto fra la forma dei cluster individuati nelle distribuzioni di tipo **F** e **S**

Figura 5.13: Confronto fra la forma dei cluster individuati nella distribuzione di tipo **V** e nella simulazione **CDM**

| | |
|----------|------|
| R | 0.27 |
| P | 0.51 |
| F | 0.68 |
| S | 0.41 |
| V | 0.18 |

Tabella 5.11: Differenza massima fra le funzioni cumulative delle $F_{MST}(l/ < l >)$ delle distribuzioni di confronto e quella della simulazione CDM

| | |
|----------|------|
| R | 0.45 |
| P | 0.44 |
| F | 0.12 |
| S | 0.12 |
| V | 0.44 |

Tabella 5.12: Differenza massima fra le funzioni cumulative delle $R(l/\mathcal{L}_{MST})$ delle distribuzioni di confronto e quella della simulazione CDM

| | |
|----------|------|
| R | 0.46 |
| P | 0.51 |
| F | 0.62 |
| S | 0.54 |
| V | 0.34 |

Tabella 5.13: Differenza massima fra le funzioni cumulative delle $N(l_T)$ delle distribuzioni di confronto e quella della simulazione CDM

Il test KS ha indicato una probabilità inferiore all'1% che le funzioni di distribuzione $F_{MST}(l/ < l >)$, $R(l/\mathcal{L}_{MST})$ e $N(l_T)$, relative ai sottocampioni della simulazione CDM possano essere state ricavate da uno qualsiasi dei campioni di confronto. Questo risultato poteva essere prevedibile: infatti nei cataloghi reali la forma delle strutture su grande scala è ben lungi dall'essere così ben definita e dall'aver caratteristiche geometriche omogenee come quelle delle distribuzioni campione da noi costruite. Per quanto riguarda le funzioni di distribuzione $F_{MST}(l/ < l >)$ va notato che le più basse differenze massime tra la funzione cumulativa relativa alla simulazione CDM e quelle dei campioni di confronto sono state osservate nel caso delle distribuzioni di tipo **R** e **V**. Ciò, come più volte già affermato, indica che esiste un certa somiglianza nel modo in cui sono distribuiti i punti nei tre tipi di distribuzioni. Dall'analisi delle funzioni $R(l/\mathcal{L}_{MST})$ è emerso invece che sono le funzioni cumulative relative alle distribuzioni di tipo **F** e **S** quelle ad avere la più bassa differenza massima rispetto alla funzione cumulativa della simulazione CDM. Le indicazioni che possiamo trarre da questi risultati sono le seguenti. Poichè con tutta probabilità nella simulazione CDM i punti non sono distribuiti entro strutture ben definite e tutte uguali come nelle distribuzioni di confronto da noi realizzate, le operazioni di *pruning* e di *separating* possono aver messo in risalto il fatto che la forma assunta dai filamenti evidenziati è essenzialmente di due tipi. Esistono gruppi di punti molto compatti che con tutta probabilità coincidono con le regioni dove i punti sono più addensati, il che potrebbe giustificare la somiglianza con le distribuzioni di tipo **S**, e gruppi filiformi, che invece spiegherebbe quella con le distribuzioni di tipo **F**. I risultati ottenuti dall'analisi delle funzioni $N(l_T)$ per mezzo del test KS sostanzialmente confermano le ipotesi precedentemente fatte nel caso delle funzioni $F_{MST}(l/ < l >)$. Una semplice ispezione visuale dei grafici dei sottocampioni di punti mostra che le ipotesi fatte erano corrette.

5.2.2 Le funzioni di struttura

Una volta completate le analisi statistiche di cui abbiamo parlato nel paragrafo precedente, abbiamo rianalizzato i cluster individuati per mezzo dell'MST come descritto in Pearson e Coles (1995) mediante le funzioni di struttura S_1 , S_2 e S_3 . Come già discusso nel paragrafo (5.1.2) tali indicatori statistici non hanno mostrato una

significativa abilità nell'operare una discriminazione fra i vari tipi di distribuzioni confrontate. Va comunque evidenziato che, come si osserva in figura (5.13) i cluster individuati nei sottocampioni della simulazione CDM sono molto sferoidali, mediamente molto più prolatti di quelli osservati nelle altre distribuzioni di confronto e non assumono forma marcatamente oblata. Questa è una buona conferma delle ipotesi fatte nel precedente paragrafo a seguito dei risultati ottenuti dall'analisi delle funzioni di distribuzione $R(l/\mathcal{L}_{MST})$. In quell'occasione infatti avevamo dedotto dai dati ottenuti che i filamenti evidenziati con l'MST dovevano avere in parte una forma molto sferoidale e in parte molto filiforme. Per finire abbiamo verificato se nel caso della simulazione CDM le quantità S_1 , S_2 e S_3 mostravano una qualche correlazione l'una rispetto all'altra. Anche in questo caso, come per tutti i tipi di campioni di confronto precedentemente analizzati, non è stata osservata nessuna significativa correlazione fra le singole funzioni di struttura.

Capitolo 6

L'analisi di percolazione

6.1 Risultati per le distribuzioni di confronto

Come fatto per la statistica dell'MST, prima di passare all'analisi vera e propria delle distribuzioni di confronto per mezzo della percolazione, abbiamo fissato un criterio in base al quale scegliere il parametro b da impiegare. Ricordiamo che tale parametro è il raggio della sfera entro cui abbiamo cercato se vi erano punti vicini al centro della detta sfera. Per raggiungere lo scopo prefissoci abbiamo considerato un campione di punti per ciascun tipo di distribuzione di confronto e abbiamo verificato come variava la lunghezza del cluster più esteso al crescere del valore del parametro b . I dati così ottenuti sono riportati in figura (6.1). Abbiamo in seguito deciso di utilizzare per l'analisi statistica successiva quei valori di b in corrispondenza dei quali la lunghezza del cluster più grande osservabile nelle varie distribuzioni diventava all'incirca pari a un decimo del lato del cubo di simulazione. In questo modo, anche se impieghiamo differenti raggi di percolazione per analizzare le varie distribuzioni, i cluster individuati in ciascuna di esse hanno caratteristiche fisiche abbastanza simili. Di conseguenza i valori del parametro b utilizzati sono: $0.6\langle l \rangle$ per le distribuzioni randomiche, $0.3\langle l \rangle$ per quelle di tipo **P**, $0.1\langle l \rangle$ per quelle di tipo **F**, $0.2\langle l \rangle$ per quelle di tipo **S** e $0.5\langle l \rangle$ per quelle di tipo **V**. Inoltre dal momento che gli indicatori statistici, impiegati per quantificare la forma dei cluster individuati per mezzo dell'analisi di percolazione, forniscono dati affidabili solo quando i cluster non sono costituiti da

Figura 6.1: Curve di percolazione di ciascun tipo di distribuzione analizzata

troppo pochi punti, abbiamo stabilito di studiare solo i cluster formati da almeno 13 punti.

Gli indicatori statistici su cui abbiamo concentrato le nostre analisi sono i due parametri di forma e e p ricavati applicando le relazioni (3.2) citate nel capitolo 3. I dati raccolti per ciascun tipo di distribuzione di controllo sono stati graficati assieme nella figura (6.2). In tali figure i cerchi pieni evidenziano la posizione occupata nel grafico dai 15 cluster più ricchi di punti individuati nei rispettivi campioni di confronto. Si nota immediatamente, come avevano già precedentemente fatto Matarrese et al. (1991) e Plionis et al. (1992), che la maggior parte dei cluster individuati sono strutture triassiali e forma prevalentemente oblata. Ricordiamo che la differenza fra gli oggetti oblati e quelli prolatti consiste nel fatto che per i primi il valore di p è positivo per i secondi negativo. In tabella (6.1) sono riportate le percentuali di oggetti oblati e prolatti in ciascun tipo di campione di confronto. A parte nel caso delle dis-

| tipo di campione | cluster oblati | cluster prolatti |
|------------------|----------------|------------------|
| R | 84.3 | 15.7 |
| P | 82.7 | 17.3 |
| F | 82.5 | 17.5 |
| S | 77.3 | 22.7 |
| V | 83.3 | 16.7 |

Tabella 6.1: Percentuale di cluster oblati e prolatti osservati in ciascun tipo di distribuzione di confronto

tribuzioni di tipo **S**, come ben si può vedere, in tutti i campioni di confronto i cluster non occupano una zona specifica del grafico, ma si distribuiscono uniformemente su di esso. Le linee tratteggiate che compaiono in figura (6.2) evidenziano dove si distribuiscono le coppie di valori (e, p) che sono soluzioni del sistema (3.2). Come era prevedibile per le distribuzioni a sfere si osservano molti cluster ricchi di punti e di forma approssimativamente sferica. Per capire il perchè di ciò è sufficiente dare uno sguardo al grafico di una qualsiasi distribuzioni di tipo **S**. In tali distribuzioni sono presenti un notevole numero di strutture sferiche molto dense e molto compatte che,

come era lecito aspettarsi, gli indicatori statistici usati hanno riconosciuto come tali.

Considerazioni analoghe a quelle fatte per le funzioni di struttura possono essere ripetute anche nel caso dell'analisi di percolazione. Sulla base dei dati da noi ricavati per le distribuzioni di confronto analizzate riteniamo di poter ragionevolmente affermare che con l'analisi di percolazione non siamo in grado di operare una discriminazione fra i vari tipi di campioni analizzati. Anche la distribuzione dei cluster numericamente più grossi non mostra una simile capacità ad eccezione del caso delle distribuzioni di tipo **S**. Però, come già detto per le funzioni di struttura, in quel tipo di distribuzioni sono osservabili un gran numero di strutture isolate di forma geometrica ben definita, che sono facilmente individuabili dagli indicatori statistici impiegati per l'analisi di percolazione.

6.2 Risultati per la simulazione CDM

Terminata l'analisi delle distribuzioni di confronto con il metodo della percolazione, abbiamo studiato le distribuzioni di punti ricavate dalla simulazione CDM seguendo una identica procedura. Innanzitutto abbiamo considerato una di queste distribuzioni ed abbiamo studiato come variava la lunghezza del cluster più esteso al variare del parametro b , precedentemente introdotto. In conformità con le scelte operate nelle precedenti analisi di percolazione abbiamo impiegato il valore di b in corrispondenza del quale la lunghezza del cluster più esteso era all'incirca pari ad un decimo del lato del volume cubico di simulazione. Il valore di b che soddisfa questa nostra condizione è 0.2, come si può ben vedere dalla figura (6.1). Come già precedentemente fatto abbiamo analizzato solo i cluster costituiti da non meno di 13 punti. I dati così raccolti sono presentati in figura (6.2).

Come già asserito alla fine del precedente paragrafo, gli indicatori statistici impiegati non sembrano in grado di operare una discriminazione fra i vari tipi di campioni analizzati. Va comunque rilevato che la distribuzione dei punti del grafico è molto simile a quella ottenuta da Matarrese et al. (1991) per simulazioni del modello di CDM sia con distribuzione primordiale gaussiana che non gaussiana. Un tale risul-

Figura 6.2: Confronto tra la simmetria triassiale dei cluster individuati nelle varie distribuzioni analizzate

tato conferma la correttezza dell'algoritmo impiegato per analizzare le distribuzioni campione. La percentuale di oggetti prolata e oblata osservata è molto simile a quella ricavata per le distribuzioni di tipo **S**. In particolare il 74.4% dei cluster individuati risulta di forma oblata, il 25.6% ha invece forma prolata.

Capitolo 7

La statistica del quadrupolo

7.1 Risultati per le distribuzioni di confronto

Per calcolare il valore della statistica del quadrupolo di Vishniac abbiamo deciso di ricorrere alla formula applicata da Messina et al. (1990):

$$S = \frac{3M^{ij}(M^{ij} - M^i M^j) - M^{ii}(M^{jj} - M^j M^j)}{M^{ii}M^{jj}}.$$

Abbiamo in seguito utilizzato la relazione ricavata da Fry (1986) che fornisce il valore teorico assunto dalla statistica del quadrupolo per una distribuzione di tipo \mathbf{R} di punti,

$$\langle S_p \rangle = \frac{50}{21\langle N \rangle} \left[1 + \frac{25}{21(\langle N \rangle - 1)} \right]^{-1},$$

ove $\langle N \rangle$ è il numero medio di punti contenuti in una sfera di raggio r , necessario per calcolare la quantità $\langle S \rangle / \langle S_p \rangle - 1$. Abbiamo quindi analizzato come varia il valore di tale quantità al variare del raggio delle regioni sferiche entro le quali è stata applicata la statistica del quadrupolo. I valori di $\langle S \rangle / \langle S_p \rangle - 1$ così ottenuti sono stati poi mediati tra le cinque diverse realizzazioni di ciascun tipo di campione di confronto e riportati in figura (7.1).

Talune volte, in particolare osservando le distribuzioni su piccole scale, la quantità $\langle S \rangle / \langle S_p \rangle - 1$ assumeva stranamente valori negativi. Il perchè di un simile comportamento dell'indicatore statistico introdotto da Vishniac è così spiegabile. L'inversione

del segno ha luogo quando la scala su cui osserviamo il sottocampione di punti ha una dimensione inferiore o paragonabile a quella delle strutture presenti all'interno delle distribuzioni. Consideriamo come esempio il caso delle distribuzioni di tipo **S**. Quando il raggio r della sfera che racchiude i punti sui quali calcoleremo il valore di S è inferiore al raggio delle sfere entro cui sono distribuiti i punti nelle distribuzioni di tipo **S**, mediante la statistica del quadrupolo analizziamo strutture molto più dense di quanto non lo sia una distribuzione random osservata sulla medesima scala. A causa di ciò il rapporto $\langle S \rangle / \langle S_p \rangle$ diventa minore di uno, per cui $\langle S \rangle / \langle S_p \rangle - 1$ assume valori negativi.

L'andamento delle curve riprodotte in figura (7.1) corrisponde abbastanza bene a quanto ci aspettavamo di osservare. Come era lecito aspettarsi, la statistica del quadrupolo indica che le distribuzioni con il più marcato eccesso di filamentarietà rispetto ad una distribuzione randomica sono quelle di tipo **F**. Seguono le distribuzioni di tipo **P** ed **S**. Per quest'ultime un simile comportamento può essere giustificato pensando al fatto che all'aumentare della scala su cui campiono le distribuzioni le regioni sferiche, in cui sono distribuiti i punti, sembrano fondersi in un'unica struttura filamentosa che la statistica del quadrupolo correttamente rileva. Seguono poi le distribuzioni di tipo **V** e per finire quelle di tipo **R** i cui valori oscillano lievemente attorno allo zero, come era prevedibile.

Sulla base dei risultati ottenuti possiamo affermare che, sebbene la statistica del quadrupolo non sia stata concepita per rilevare la forma delle singole strutture osservabili in una distribuzione di punti, ma solo il grado di filamentarietà di quest'ultima rispetto ad una distribuzione poissoniana, essa sembra in grado di operare una buona discriminazione fra i vari tipi di campioni di punti esaminati.

7.2 Risultati per la simulazione CDM

Concludiamo la serie di indagini condotte sulla simulazione di un modello CDM discutendo i dati ottenuti per mezzo della statistica del quadrupolo. Dopo aver ripetuto la medesima procedura seguita per le distribuzioni di confronto, abbiamo riportato i dati ottenuti in figura (7.1). È evidente che la curva relativa alla simu-

Figura 7.1: Andamento del parametro $\langle S \rangle / \langle S_p \rangle - 1$ in funzione del raggio r

lazione CDM ha un andamento molto simile a quello delle distribuzioni di tipo **V**. Ciò in pieno accordo con quanto dedotto dall'analisi dei risultati ottenuti con l'MST. Va notato inoltre che, come risulta evidente dalla figura (7.1), al crescere del valore del parametro r la statistica del quadrupolo mostra una sempre maggiore abilità nell'operare una discriminazione fra le varie distribuzioni analizzate. Ciò si spiega molto banalmente riflettendo sul fatto che quando osserviamo le nostre distribuzioni su scale molto piccole e inferiori alle dimensioni caratteristiche delle strutture entro cui sono distribuiti i punti, analizziamo solo le strutture su piccola scala. Queste, come si può constatare osservando i grafici mostrati nel quarto capitolo, hanno caratteristiche molto simili in tutti i campioni da noi studiati. Non è quindi più possibile operare una netta discriminazione fra i vari tipi di distribuzioni.

Conclusioni

Come brevemente già accennato nell'introduzione, i campioni di confronto analizzati sono modelli molto schematici e molto semplificati dei tipi di strutture osservabili nella distribuzione su grande scala delle galassie nell'universo. Così facendo abbiamo volutamente evitato di confrontarci nelle nostre analisi con il problema dell'incompletezza comune a tutti i cataloghi di galassie a nostra disposizione. Tale problema deriva principalmente dal fatto che il mezzo interstellare occulta le sorgenti luminose più distanti da noi. Altri effetti che concorrono a rendere incompleta la nostra campionatura dell'universo sono la limitatezza in volume e in magnitudine dei cataloghi di galassie fino ad oggi realizzati. Alla luce di simili considerazioni è dunque necessario ricordarsi di interpretare con molta cautela i risultati presentati in questa tesi, sapendo che la loro robustezza verrebbe notevolmente ridotta quando confrontati con quelli ricavati per cataloghi reali di oggetti.

Sulla base dei risultati ottenuti abbiamo tratto le seguenti conclusioni sugli indicatori statistici esaminati. L'MST è stato l'unico fra i metodi di analisi delle strutture su grande scala che abbia evidenziato una concreta capacità di operare una netta discriminazione tra le forme assunte dagli ammassi di punti individuabili nelle varie distribuzioni analizzate. Oltre a ciò abbiamo verificato che l'MST, come più volte ribadito in letteratura, si mostra in grado di isolare ed identificare le strutture principali individuabili visivamente nei campioni di punti analizzati. Sempre nel quadro degli studi svolti applicando la statistica dell'MST, abbiamo verificato come la scelta della lunghezza caratteristica del parametro di *separating* influisce sulle caratteristiche fisiche dei filamenti individuati nelle varie distribuzioni di confronto individuate. In particolare abbiamo considerato come due possibili candidati la lunghezza media dei

lati che connettono in tutti i modi possibili i punti di una distribuzione, $\langle l \rangle$ e la lunghezza media dei lati appartenenti all'MST, \mathcal{L}_{MST} . Poichè non abbiamo evidenziato nessuna giustificazione incontrovertibile a favore della scelta fra l'una o l'altra delle due lunghezze caratteristiche considerate, abbiamo continuato ad uniformarci alle scelte fatte in letteratura.

Diversamente dall'MST, le funzioni di struttura e il metodo della percolazione hanno mostrato che le sottostrutture isolate con tale algoritmo non assumono forme caratteristiche tali da consentirci di operare una discriminazione fra le distribuzioni confrontate. Tuttavia i test da noi eseguiti non sminuiscono la robustezza di questi metodi statistici. In particolare nel caso delle funzioni di struttura abbiamo verificato con successo che sono perfettamente in grado di descrivere correttamente la forma di strutture molto semplici e isolate.

Nel caso dell'analisi di percolazione abbiamo verificato che la forma intrinseca degli oggetti individuati nella simulazione di un modello CDM da noi analizzata è sostanzialmente simile a quella rilevata da Matarrese et al. (1991) in simulazioni del modello di CDM con distribuzione primordiale sia gaussiana che non gaussiana. Tale metodo di indagine statistica ha però anche mostrato che la forma tridimensionale dei cluster individuati nelle distribuzioni analizzate non è strettamente dipendente dalla forma geometrica delle strutture entro cui sono stati isolati. Di conseguenza non ci è stato possibile operare una discriminazione fra i vari campioni analizzati.

Per quanto riguarda la statistica del quadrupolo proposta da Vishniac, i nostri dati evidenziano che il metodo si è mostrato in grado di operare una discriminazione fra le varie distribuzioni analizzate. Come più volte ripetuto però, questa statistica non ci consente di identificare concretamente la forma delle strutture osservabili all'interno dei campioni di punti studiati, ma solo quale è il grado di filamentarietà rispetto ad una distribuzione poissoniana delle stesse. Inoltre, come già evidenziato nel capitolo 7, è necessaria una oculata scelta delle scale su cui si campiona la forma delle strutture individuabili in una distribuzione. Infatti osservando un campione su scale inferiori o paragonabili alle lunghezze caratteristiche delle strutture entro cui si distribuiscono i punti, si corre il rischio di analizzare solo le strutture su piccola scala, mascherando completamente le caratteristiche di quelle su grande scala.

Due sono le considerazioni finali che emergono alla fine di tutte le analisi statistiche eseguite. In primo luogo le distribuzioni di confronto da noi costruite probabilmente sono caratterizzate da strutture troppo semplici e troppo ben definite per costituire un valido paragone con le strutture su grande scala osservabili su grande scala nei cataloghi di galassie reali. In secondo luogo per il tipo di indagine da noi condotta sono necessari indicatori statistici molto più robusti di quelli finora a disposizione. Per concludere ribadiamo comunque il fatto che avendo noi analizzato solo distribuzioni non affette dal problema dell'incompletezza, come tutti i cataloghi reali a nostra disposizione, la robustezza degli indicatori statistici, da noi applicati allo studio delle proprietà di clustering dell'universo, diminuirebbe qualora venissero utilizzati per studiare campioni reali.

Bibliografia

- Babul A. and Starkman G. D., 1992, ApJ, 401, 28
- Barrow J. D., Bhavsar S. P. and Sonoda D. H., 1985, MNRAS, 216, 17
- Bhavsar S. P. and Ling E. N., 1988, ApJ, 331, L63
- Bhavsar S. P. and Splinter R. J., 1996, MNRAS, preprint
- Coles P. and Lucchin F., Cosmology, 1995, ed. John Wiley and sons
- Davies M. and Peebles P. J. E., 1983, ApJ, 267, 465
- Dominik K. G. and Shandarin S. F., 1992, ApJ, 393, 450
- Eisenstein D. J., Loeb A. and Turner E. L., 1996, ApJ, preprint
- Fry J. N., 1986, ApJ, 306, 366
- Klypin A. and Shandarin S. F., 1993, ApJ, 413, 48
- Kuhn J. R. and Uson J. M., 1982, ApJ, 263, L47
- Lucchin F., Introduzione alla Cosmologia, 1990, ed. Zanichelli
- Matarrese S., Lucchin F., Messina A. and Moscardini L., 1991, MNRAS, 253, 35
- Messina A., Moscardini L., Lucchin F. and Matarrese S., 1990, MNRAS, 245, 244
- Moody J. E., Turner E. L. and Gott J. R., 1983, ApJ, 273, 16
- Peacock J. A., and Dodds S., 1994, MNRAS, 267, 1020
- Pearson R. C. and Coles P., 1995, MNRAS, 272, 231
- PLionis M. and Frenk C. S. F., 1991, unpublished
- Plionis M., Valdarnini R. and Yi-Peng Jing, 1992, ApJ, 398, 12

Press W. H., Flannery B. P., Teukolsky S. A. and Vetterling W. T., 1989,
Numerical Recipes, Cambridge University Press

Sathyaprakash B. S., Sahni V. and Shandarin S.F., 1996, ApJL, preprint

Soneria R. M. and Peebles P. J. E., 1978, AJ, 83, 845

Vishniac E., 1986, Proc.Inner Space/Outer Space, ed. Kolb E.W., Turner M.S.,
Olive K., Seckel D., University of Chicago Press, Chicago, 190

West M. J., 1989, ApJ, 347, 610

Yess C. and Shandarin S. F., 1996, ApJ, preprint